2024 GEORGIA
EUROPEAN GIRLS' MATHEMATICAL OLYMPIAD

Language: **Macedonian**

Day: **1**

Сабота, 13 април, 2024

Задача 1. Два различни цели броја u и v се запишани на табла. Изведуваме низа од чекори. Во секој чекор користиме една од следниве две постапки:

(i) Ако a и b се различни цели броеви на таблата, тогаш го запишуваме и бројот $a+b$ на таблата, доколку претходно не е веќе запишан.

(ii) Ако a, b и c се три различни цели броеви на таблата, и ако цел број x го задоволува равенството $ax^2 + bx + c = 0$, тогаш го запишуваме и бројот x на таблата, доколку претходно не е веќе запишан.

Одреди ги сите парови на почетни броеви (u, v) за кои секој цел број, по конечна низа од чекори, може да биде запишан на таблата.

Задача 2. Нека ABC е триаголник кај кој за должините на страните важи $AC > AB$. Нека Ω е опишаната кружница околу триаголникот, а I е центарот на впишаната кружница. Впишаната кружница ги допира страните BC, CA, AB во точки D, E, F соодветно. Нека X и Y се две точки, на помалите по должина лаци $\widehat{DF}$ и $\widehat{DE}$ од впишаната кружница, соодветно, такви што $\angle BXD = \angle DYC$. Правите XY и BC се сечат во точка K. Нека T е точка од Ω таква што права KT е тангента на Ω при што T и A се наоѓаат на иста страна од правата BC. Докажи дека правите TD и AI се сечат на кружницата Ω.

Задача 3. Природен број n го нарекуваме *чуден* ако, за секој позитивен делител d на n, бројот $d(d+1)$ го дели бројот $n(n+1)$. Докажи дека за било кои четири различни чудни природни броеви A, B, C и D, важи:

$$\gcd(A, B, C, D) = 1.$$

Со $\gcd(A, B, C, D)$ *е означен најголемиот заеднички делител на броевите* A, B, C *и* D.

Време: 4 часа и 30 минути
Секоја задача носи 7 поени

Недела, 14 април, 2024

Задача 4. За низа од цели броеви $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, паротот (a_i, a_j) со индекси $1 \leq i < j \leq n$ се нарекува *интересен*, ако постои пар цели броеви (a_k, a_ℓ) со индекси $1 \leq k < \ell \leq n$, така што

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

За секој $n \geq 3$, одреди го најголемиот можен број интересни парови, во низа од цели броеви со должина n.

Задача 5. Со $\mathbb{N}$ е означено множеството природни броеви. Одреди ги сите функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такви што следните два услови важат за секој пар природни броеви (x, y):

(i) Броевите x и $f(x)$ имаат еднаков број на позитивни делители.

(ii) Ако x не е делител на y и y не е делител на x, тогаш

$$\gcd(f(x), f(y)) > f(\gcd(x, y)).$$

Со $\gcd(m, n)$ *е означен најголемиот заеднички делител на броевите* m *и* n.

Задача 6. Одреди ги сите природни броеви d за кои постои полином P од степен d, со коефициенти реални броеви, таков што меѓу вредностите $P(0), P(1), P(2), \ldots, P(d^2 - d)$ најмногу d од нив се различни.

Време: 4 часа и 30 минути
Секоја задача носи 7 поени