34. МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР ГРАДОВА

Лакша јесења варијанта, 7.10.2012.

Млађи узраст (8. разред основних и 1. разред средњих школа)

Израда задатака траје 5 сати

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је ученик добио највећи број поена)

поени	задатак	
3	1.	Пет ученика имају имена Цаки, Димитрије, Јанко, Радосав и Стефан, док су њихова презимена (у неком редоследу) Цакић, Димитријевић, Јанковић, Радосављевић и Стефановић. Познато је да је Цаки старији 1 годину од Цакића, Димитрије старији 2 године од Димитријевића, Јанко старији 3 године од Јанковића, Радосав старији 4 године од Радосављевића. Да ли је старији Стефан или Стефановић и за колико?
4	2.	Нека је $C(n)$ број простих делилаца природног броја n (нпр. $C(10) = 2, C(11) = 1, C(12) = 2$). Да ли је број уређених парова (a, b), $a \neq b$, за које важи $C(a + b) = C(a) + C(b)$ коначан или бесконачан?
5	3.	У нека јединична поља табле 10×10 постављене су бомбе. Свако јединично поље које нема бомбу, садржи број који је једнак броју бомби у њему суседним пољима (два поља су суседна ако имају заједничку страну или ако имају заједничко теме). Након овога направљен је нови распоред - свако поље које није садржало бомбу сада садржи бомбу, док је у свако преостало поље уписан број који је једнак броју бомби у њему суседним пољима (у новом распореду). Да ли је могуће да је збир свих уписаних бројева у новом распореду већи од збира свих уписаних бројева у почетном распореду?
5	4.	Кружница додирује странице AB, BC и CD паралелограма $ABCD$, редом, у тачкама K, L и M. Доказати да права KL полови висину паралелограма конструисану из темена C на страницу AB.
5	5.	Двадесет ученика неког одељења ишло је на неколико излета. Сваком излету присуствовао је бар један ученик. Доказати да постоји излет такав да је сваки његов учесник учествовао на бар $\frac{1}{20}$ свих излета.

34. МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР ГРАДОВА

Лакша јесења варијанта, 7.10.2012.

Старији узраст (2. и 3. разред средњих школа)

Израда задатака траје 5 сати

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је ученик добио највећи број поена)

поени	задатак	
4	1.	У нека јединична поља табле $m \times n$, где су m и n фиксирани природни бројеви, постављене су бомбе. Свако јединично поље које нема бомбу, садржи број који је једнак броју бомби у њему суседним пољима (два поља су суседна ако имају заједничку страну или ако имају заједничко теме). Након овога направљен је нови распоред - свако поље које није садржало бомбу сада садржи бомбу, док је у свако преостало поље уписан број који је једнак броју бомби у њему суседним пољима (у новом распореду). Да ли је могуће да је збир свих уписаних бројева у новом распореду већи од збира свих уписаних бројева у почетном распореду?
	2.	Дат је конвексан полиедар и сфера која сече сваку његову ивицу и дели је на три једнака дела. Да ли многоуглови који представљају стране тог полиеадра морају бити
2	а)	подударни
3	б)	правилни?
5	3.	Двадесет ученика неког одељења ишло је на неколико излета. Сваком излету присуствовало је бар четворо ученика. Доказати да постоји излет такав да је сваки његов учесник учествовао на бар $\frac{1}{17}$ свих излета.
	4.	Нека је $C(n)$ број простих делилаца природног броја n.
2	а)	Да ли је број уређених парова (a, b), $a \neq b$, за које важи $C(a+b) = C(a) + C(b)$ коначан или бесконачан?
3	б)	Да ли је број уређених парова (a, b), $a \neq b$, за које важи $C(a+b) = C(a) + C(b) > 1000$ коначан или бесконачан?
5	5.	Међу 239 новчића налазе се два лажна. Исправни новчићи имају међусобно једнаке тежине. Лажни новчићи такође имају међусобно једнаке тежине, али се њихова тежина разликује од тежине исправних новчића. Утврдити помоћу три мерења на теразијама (вага без тегова) да ли су лажни новчићи тежи или лакши од исправних.

34. МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР ГРАДОВА

Основна јесења варијанта, 21.10.2012.

Млађи узраст (8. разред основних и 1. разред средњих школа)

Израда задатака траје 5 сати

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је ученик добио највећи број поена.)

поени	задаци	
4	1.	За декадни запис неког целог броја користе се само две различите цифре. Познато је да тај број има барем 10 цифара и да су сваке две узастопне цифре међусобно различите. Који је највећи степен двојке који може да дели овај број?
5	2.	Чип и Дејл играју следећу игру. На почетку игре, Чип распореди 222 лешника у 2 кутије. Дејл види како су распоређени лешници и бира природан број N из скупа $\{1, 2, ..., 222\}$. Затим, Чип узима додатну трећу кутију (која је празна) и премешта, уколико је то неопходно, неки број лешника из прве две кутије у трећу са циљем да у некој од ове три кутији буде тачно N лешника, или да неке две кутије заједно садрже N лешника. Дејл добија све лешнике који су премештени у трећу кутију. Који је максималан број лешника који Дејл може да добије, без обзира како Чип игра?
6	3.	У неким пољима таблице 11×11 уписан је знак плус: $+$. Познато је да је укупан број плусева у целој таблици паран и да је број плусева у свакој 2×2 подтаблици такође паран. Доказати да је укупан број плусева на главној дијагонали ове таблице паран број. (Главна дијагонала је она дијагонала која спаја горње лево и доње десно поље)
7	4.	Дат је троугао ABC. Нека је I центар уписаног круга овог троугла, а X, Y, Z центри уписаних кругова троуглова AIB, BIC анд AIC, редом. Центар уписаног круга троугла XYZ поклапа се са тачком I. Да ли из тога обавезно следи да је троугао ABC једнакостраничан?
8	5.	Аутомобил се креће по кружној стази у смеру кретања казаљки на часовнику. Тачно у подне, Петар и Павле стали су поред траке, на различитим позицијама, да посматрају аутомобил. Након неког времена, истовремено су напустили своје позиције и упоредили своја запажања. Приметили су да је аутомобил прошао поред сваког од њих барем 30 пута. Поред тога, Петар је приметио да је аутомобил сваки наредни круг прелазио једну секунду брже него претходни, а Павле је приметио да је аутомобил сваки наредни круг прелазио једну секунду спорије него претходни. Доказати да су они посматрали аутомобил барем један и по сат.
	6.	
4	а)	Унутар круга уочена је тачка A. Кроз тачку A конструисане су две међусобно нормалне праве које пресецају круг у четири тачке. Доказати да центар маса ове четири тачке не зависи од избора оваквих двеју правих.
4	б)	Унутар круга уочен је правилан $2n$-тоугао ($n \geq 2$) са центром у A (A није обавезно и центар круга). $2n$ полуправих које полазе из тачке A и садрже темена овог $2n$-тоугла, пресецају круг у $2n$ тачака. Обележимо са O центар маса ових $2n$ тачака. Затим се овај $2n$-тоугао ротира око тачке A и поново се конструишу нових $2n$ полуправих које полазе из A и садрже темена $2n$-тоугла, које пресецају круг у нових $2n$ тачака. Обележимо са N центар маса ових нових $2n$ тачака. Доказати да је $O = N$.
10	7.	Петар и Павле играју следећу игру. На почетку игре, Петар замисли неки природан број a чији је збир цифара једнак 2012. Павле зна да је збир цифара броја a једнак 2012, али жели да погоди који је то број. У сваком потезу, Павле бира природан број x, а Петар му саопштава колики је збир цифара броја $\lvert x - a \rvert$. Колики је минималан број потеза потребан Павлу да би одредио који је број a?

34. МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР ГРАДОВА

Основна јесења варијанта, 21.10.2012.

Старији узраст (2. и 3. разред средњих школа)

Израда задатака траје 5 сати

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је ученик добио највећи број поена.)

поени	задаци	
4	1.	Дат је бесконачни низ реалних бројева $a_1, a_2, a_3, \ldots$ За сваки природан број k постоји природан број $t = t(k)$ тако да је $a_k = a_{k+t} = a_{k+2t} = \ldots$ Да ли обавезно постоји природан број T тако да је $a_k = a_{k+T}$ за свако $k \in \mathbb{N}$?
5	2.	Чип и Дејл играју следећу игру. На почетку игре, Чип распореди 1001 лешник у 3 кутије. Дејл види како су распоређени лешници и бира природан број N из скупа $\{1, 2, ..., 1001\}$. Затим, Чип узима додатну четврту кутију (која је празна) и премешта, уколико је то неопходно, неки број лешника из прве три кутије у четврту са циљем да у неким кутијама (могће и само једној), међу овим четири, буде укупно тачно N лешника. Дејл добија све лешнике који су премештени у четврту кутију. Који је максималан број лешника који Дејл може да добије, без обзира како Чип игра?
6	3.	Аутомобил се креће по кружној стази у смеру кретања казаљки на часовнику. Тачно у подне, Петар и Павле стали су поред траке, на различитим позицијама, да посматрају аутомобил. Након неког времена, истовремено су напустили своје позиције и упоредили своја запажања. Аутомобил је прошао поред сваког од њих барем 30 пута. Поред тога, Петар је приметио да је аутомобил сваки наредни круг прелазио једну секунду брже него претходни, а Павле је приметио да је аутомобил сваки наредни круг прелазио једну секунду спорије него претходни. Доказати да су они посматрали аутомобил барем један и по сат.
8	4.	На страницама AB и BC троугла ABC уочене су тачке C_1 и A_1 редом, различите од темена троугла. Нека је K средина дужи A_1C_1 и I центар уписаног круга троугла ABC. Ако је четвороугао A_1BC_1I тетиван, доказати да је угао $\angle AKC$ туп.
8	5.	Петар и Павле играју следећу игру. На почетку игре, Петар замисли неки природан број a чији је збир цифара једнак 2012. Павле зна да је збир цифара броја a једнак 2012, али жели да погоди који је то број. У сваком потезу, Павле бира природан број x, а Петар му саопштава колики је збир цифара броја $\lvert x - a \rvert$. Колики је минималан број потеза потребан Павлу да би одредио који је број a?
	6.	
5	а)	Унутар сфере уочена је тачка A. Кроз тачку A конструисане су три међусобно нормалне праве које пресецају сферу у шест тачака. Доказати да центар маса ових шест тачака не зависи од избора оваквих правих.
5	б)	Унутар сфере уочен је икосаедар са центром у A (A није обавезно и центар сфере). 12 полуправих које полазе из тачке A и садрже темена овог икосаедра, пресецају круг у 12 тачак чији је центар масе тачка O. Затим се овај икосаедар ротира око тачке A и поново се конструишу нових 12 полуправих које полазе из A и садрже темена икосаедра, које пресецају круг у нових 12 тачака. Обележимо са N центар маса ових нових 12 тачака. Доказати да је $O = N$. (Икосаедар је правилан полиедар са 20 троугаоних страна; из сваког темена полази 5 ивица).
10	7.	Трака димензије $1 \times 1\,000\,000$, сачињена од јединичних поља, подељена је на 100 сегмената. У свако поље уписан је по један цео број, тако да поља која припадају истом сегменту садрже исте бројеве. На свако поље је постављен по један жетон и урађено је следеће: сваки жетон је померен удесно за онолико поља колики је број у пољу на коме је жетон постављен (уколико је у поље био уписан негативан број, жетон се помера улево). Испоставило се да се након ове операције поново на сваком пољу нашао по један жетон. Ова операција је затим понављана много пута. За сваки жетон који је на почетку био постављен на неко поље из првог сегмента, записан је број операција изведених док се тај жетон није први пут вратио на неко поље из првог сегмента. Доказати да међу записаним бројевима, постоје највише 100 различитих.

34. MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA

Lakša prolećna varijanta, 24.2.2013.

Mlađi uzrast (8. razred osnovnih i 1. razred srednjih škola)

Izrada zadataka traje 5 sati

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je učenik dobio najveći broj poena)

---

poeni	zadatak	
3	1.	U ravni je dato šest tačaka. Poznato je da se ove tačke mogu podeliti u dve grupe od po tri tačke, tako da tačke iz iste grupe čine temena trougla. Da li odatle sledi da se ove tačke mogu podeliti u dve grupe od po tri tačke, tako da tačke iz iste grupe čine temena trougla i da ta dva trougla nemaju zajedničkih tačaka (kako unutrašnjih tako i ivičnih)?
4	2.	Na tabli je zapisan prirodan broj A. U svakom koraku brišemo broj koji se trenutno nalazi na tabli (neka je to broj x), a umesto njega pišemo ili $x+9$ ili broj koji se dobija izbacivanjem cifre 1 sa bilo koje pozicije u broju x. Da li je uvek moguće, počevši od broja A, nakon nekoliko poteza dobiti broj $A+1$? (Ako želimo da obrišemo cifru 1 sa vodeće pozicije, brišemo i sve nule koje slede neposredno nakon te jedinice).
4	3.	Svaki od 11 tegova ima masu koja iznosi prirodan broj grama. Nikoja dva tega nemaju jednake mase. Poznato je da, ako izaberemo bilo koji podskup ovog skupa tegova i rasporedimo ga u bilo kom rasporedu na dva tasa terazija, ukoliko se broj tegova na jednom i drugom tasu razlikuju, uvek će teža biti ona strana na kojoj se nalazi veći broj tegova. Dokazati da barem jedan od ovih tegova ima masu veću od 35 grama.
5	4.	Na šahovskoj tabli, dimenzije 8×8, nalazi se 8 topova, tako da se nikoja dva topa međusobno ne napadaju. Sva polja table podeljena su ovim topovima na sledeći način: polje na kome se nalazi top pripada tom topu; ako neko polje napadaju dva topa, ono pripada onom topu koji je bliži tom polju, a ukoliko je to polje jednako udaljeno od oba topa, svaki top dobija po polovinu tog polja. Dokazati da je svaki top ukupno dobio istu površinu na tabli.
5	5.	U četvorouglu $ABCD$, ugao kod temena B iznosi $150°$, ugao kod temena C iznosi $90°$, a stranice AB i CD su jednake. Odrediti ugao između prave BC i prave koja spaja sredine stranica BC i AD.

34. MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA

Lakša prolećna varijanta, 24.2.2013.

Stariji uzrast (2. i 3. razred srednjih škola)

Izrada zadataka traje 5 sati

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je učenik dobio najveći broj poena)

---

poeni	zadatak
3	1. Na tabli je zapisan prirodan broj A. U svakom koraku brišemo broj koji se trenutno nalazi na tabli (neka je to broj x), a umesto njega pišemo ili $x+9$ ili broj koji se dobija izbacivanjem cifre 1 sa bilo koje pozicije u broju x. Da li je uvek moguće, počevši od broja A, nakon nekoliko poteza dobiti broj $A+1$? (Ako želimo da obrišemo cifru 1 sa vodeće pozicije, brišemo i sve nule koje slede neposredno nakon te jedinice).
4	2. Neka je ABC pravougli trougao, sa pravim uglom u temenu C. Nad katetama AC i BC konstruisani su kvadrati $ACKL$ i $BCMN$, u spoljašnjosti trougla ABC. Ako je CE visina trougla ABC, dokazati da je ugao LEM prav.
4	3. Na šahovskoj tabli, dimenzije 8×8, nalazi se 8 topova, tako da se nikoja dva topa međusobno ne napadaju. Sva polja table podeljena su ovim topovima na sledeći način: polje na kome se nalazi top pripada tom topu; ako neko polje napadaju dva topa, ono pripada onom topu koji je bliži tom polju, a ukoliko je to polje jednako udaljeno od oba topa, svaki top dobija po polovinu tog polja. Dokazati da je svaki top ukupno dobio istu površinu na tabli.
4	4. Na svakom od 100 tegova nalazi se nalepnica koja pokazuje stvarnu masu tog tega. Nestašni Griša želi da preuredi nalepnice tako da suma brojeva na nalepnicama bilo koje grupe od $k \in \{1, 2, ..., 99\}$ tegova nije jednaka ukupnoj masi tih tegova. Da li Griša uvek može da uspe u svojoj nestašnoj nameri?
5	5. Kvadratni trinom je *prihvatljiv* ako su mu koeficijenti celobrojni, vodeći koeficijent je jednak 1, apsolutna vrednost koeficijenata ne prelazi 2013 i nule tog kvadratnog trinoma su celi brojevi. Vasa je sabrao sve prihvatljive kvadratne trinome. Dokazati da trinom koji je dobio tom prilikom nema realnih nula.

34. MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA

Osnovna prolećna varijanta, 10.3.2013.

Mlađi uzrast (8. razred osnovnih i 1. razred srednjih škola)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je učenik dobio najveći broj poena.)

poeni	zadaci
4	1. Na tabli se nalazi nekoliko prirodnih brojeva. Suma bilo koja dva broja sa table jednaka je nekom stepenu dvojke. Koliko se najviše različitih brojeva može naći na tabli?
4	2. Dvadesetoro dece, deset dečaka i deset devojčica stoje u vrsti. Svaki dečak je izbrojao koliko se dece nalazi desno od njega i zapamtio taj broj. Svaka devojčica je izbrojala koliko se dece nalazi levo od nje i zapamtila taj broj. Dokazati da je zbir svih brojeva koje su zapamtili dečaci jednak zbiru svih brojeva koje su zapamtile devojčice.
5	3. Data je tabla dimenzije 19×19. Da li je moguće markirati neke kvadratiće dimenzije 1×1 tako da svaki kvadrat dimenzije 10×10 sadrži različit broj markiranih kvadratića?
5	4. 1000 realnih brojeva različitih od nule je poredjano u krug i ofarbano naizmenično crnom i belom bojom. Svaki crni broj je jednak zbiru dva njemu susedna bela broja, dok je svaki beli broj jednak proizvodu dva njemu susedna crna broja. Koje sve vrednosti može imati zbir ovih 1000 brojeva?
6	5. Tačka u (koordinatnoj) ravni čije su obe koordinate celi brojevi se naziva *čvor*. Uočimo trougao čija se temena nalaze u čvorovima i koji sadrži tačno dva čvora u svojoj unutrašnjosti. Dokazati da prava kroz ta dva čvora ili sadrži teme trougla ili je paralelna sa nekom od stranica trougla.
8	6. Neka je ABC pravougli trougao i neka je I centar upisanog kruga u trougao ABC koji dodiruje njegove katete AC i BC u tačkama B_0 i A_0, redom. Neka se normala iz tačke A_0 na pravu AI i normala iz tačke B_0 na pravu BI seku u tački P. Dokazati da je $CP \perp AB$.
9	7. Dva tima A i B učestvuju na školskom turniru u stonom tenisu. Tim A se sastoji od m učenika a tim B od n učenika gde je $m \neq n$. Postoji samo jedan sto za stoni tenis na kome je moguće igrati i turnir je organizovan na sledeći način. Dva učenika iz različitih timova počnu da igraju meč dok svi ostali učenici formiraju red i čekaju njihov red za igru. Kada se neki meč završi, učenik sa početka trenutnog reda menja člana svog tima koji je igrao u tom meču i igra protiv preostalog igrača (tj. član suprotnog tima nastavlja da igra). Igrač koji je zamenjen ide na kraj reda. Dokazati da će svaka dva učenika iz suprotnih timova u nekom trenutku igrati meč jedan protiv drugog.

34. MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA

Osnovna prolećna varijanta, 10.3.2013.

Stariji uzrast (2. i 3. razred srednjih škola)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je učenik dobio najveći broj poena.)

---

poeni	zadaci	
3	1.	Na tabli se nalazi nekoliko prirodnih brojeva. Suma bilo koja dva broja sa table jednaka je nekom stepenu dvojke. Koliko se najviše različitih brojeva može naći na tabli?
4	2.	Na dugačkoj plaži sede jedan dečak i jedna devojčica. Zatim, dvadesetoro dece, jedno za drugim, dođu na plažu i svako dete sedne između dvoje dece koje već sede na plaži. Dete je *hrabro* ukoliko je selo između dvoje dece suprotnog pola od njegovog. Nakon što je i poslednje dete zauzelo svoje mesto, ispostavilo se da dečaci i devojčice sede naizmenično. Da li je moguće jednoznačno odrediti broj hrabre dece među njima?
6	3.	U ravni je dat koordinatni sistem. Tačku te ravni nazivamo *čvor* ako su obe koordinate ta tačke celobrojne. Posmatrajmo trougao čija su temena čvorovi i koji sadrži barem dva čvora u svojoj unutrašnjosti. Dokazati da u unutrašnjosti tog trougla postoje dva čvora takva da prava određena njima prolazi kroz teme trougla ili je paralelna sa jednom stranicom trougla.
6	4.	Brojevi $1, 2, ..., 100$ zapisani su na kružnici, u nekom redosledu. Da li je moguće da je za svaka dva susedna broja na kružnici njihova apsolutna vrednost razlike ne manja od 30 i ne veća od 50?
7	5.	U ravni su izabrane tri tačke i jednoj je dodeljena crvena, jednoj plava i jednoj žuta boja; ostalim tačkama te ravni nisu dodeljene boje. Jedan korak sastoji se od sledećeg: izaberu se dve tačke kojima su dodeljene različite boje; zatim se odredi još jedna tačka u ravni i njoj se dodeli preostala treća boja tako da sve tri tačke čine temena jednakostraničnog trougla čijim temenima su dodeljene boje, u smeru kazaljke na satu: crvena, plava, žuta. Svakoj tački ravni može da se dodeli više boja. Dokazati da nakon proizvoljnog broja koraka važi: za proizvoljnu boju $x \in \{$crvena, plava, žuta$\}$ sve tačke kojima je dodeljena boja x nalaze se na jednoj pravoj.
	6.	Dato je 5 međusobno različitih pozitivnih realnih brojeva. Poznato je da je suma kvadrata ovih brojeva jednaka sumi 10 proizvoda od po dva različita realna broja.
4	a)	Dokazati da je moguće izabrati tri realna broja od ovih pet, tako da ne postoji trougao čije su dužine stranica jednake tim brojevima.
5	b)	Dokazati da je broj trojki opisanih u delu pod a) barem 6. (Trojke sačinjene od istih brojeva u različitim redosledima smatraju se istim).
	7.	Kralj je odlučio da redukuje svoj Savet koji se sastoji od 1000 čarobnjaka. Poređao ih je u niz i stavio im je kape na kojima su bili zapisani brojevi od 1 do 1001 u nekom redosledu (kapu koju nije iskoristio je sakrio). Svaki čarobnjak vidi samo one kape koje se nalaze na glavama čarobnjaka ispred njega. Kada Kralj da znak, počevši od poslednjeg čarobnjaka u nizu, svaki čarobnjak izgovara jedan broj od 1 do 1001, tako da svi ostali čarobnjaci mogu da ga čuju. Ni jedan broj ne sme biti izgovoren dva puta. Svaki čarobnjak koji ne pogodi broj na svojoj kapi biva izbačen iz Saveta. Čarobnjaci su znali za ovaj test i mogli su da dogovore strategiju unapred.
5	a)	Da li čarobnjaci mogu da smisle strategiju koja bi garantovala da će više od 500 njih ostati u Savetu?
7	b)	Da li čarobnjaci mogu da smisle strategiju koja bi garantovala da će barem 999 njih ostati u Savetu?

ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 7 октября 2012 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
3	1. Про группу из пяти человек известно, что Алеша на 1 год старше Алексеева, Боря на 2 года старше Борисова, Вася на 3 года старше Васильева, Гриша на 4 года старше Григорьева, а еще в этой группе есть Дима и Дмитриев. Кто старше и на сколько: Дима или Дмитриев? *Е. Бакаев*
4	2. Пусть $C(n)$ — количество различных простых делителей числа n. (Например, $C(10) = 2, C(11) = 1, C(12) = 2$.) Конечно или бесконечно число таких пар натуральных чисел (a, b), что $a \neq b$ и $$C(a + b) = C(a) + C(b)?$$ *Г. К. Жуков*
5	3. Таблица 10×10 заполняется по правилам игры «Сапёр»: в некоторые клетки ставят по мине, а в каждую из остальных клеток записывают количество мин в клетках, соседних с данной клеткой (по стороне или вершине). Может ли увеличиться сумма всех чисел в таблице, если все «старые» мины убрать, во все ранее свободные от мин клетки поставить мины, после чего заново записать числа по правилам? *А. Ю. Эвнин*
5	4. Окружность касается сторон AB, BC, CD параллелограмма $ABCD$ в точках K, L, M соответственно. Докажите, что прямая KL делит пополам высоту параллелограмма, опущенную из вершины C на AB. *П. А. Кожевников*
5	5. В классе 20 школьников. Было устроено несколько экскурсий, в каждой из которых участвовал хотя бы один школьник этого класса. Докажите, что найдётся такая экскурсия, что каждый из участвовавших в ней школьников этого класса принял участие по меньшей мере в $1/20$ всех экскурсий. *Н. К. Верещагин*

ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 7 октября 2012 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
4	1.	Таблица $m \times n$ заполняется по правилам игры «Сапёр»: в некоторые клетки ставят по мине, а в каждую из остальных клеток записывают количество мин в клетках, соседних с данной клеткой (по стороне или вершине). Может ли увеличиться сумма всех чисел в таблице, если все «старые» мины убрать, во все ранее свободные от мин клетки поставить мины, после чего заново записать числа по правилам? *А. Ю. Эвнин*
	2.	Даны выпуклый многогранник и сфера, которая пересекает каждое ребро многогранника в двух точках. Точки пересечения со сферой делят каждое ребро на три равных отрезка. Обязательно ли тогда все грани многогранника:
2	а)	равные многоугольники;
3	б)	правильные многоугольники? *Г. А. Гальперин*
5	3.	В классе 20 школьников. Было устроено несколько экскурсий, в каждой из которых участвовало хотя бы четверо школьников этого класса. Докажите, что найдётся такая экскурсия, что каждый из участвовавших в ней школьников этого класса принял участие по меньшей мере в $1/17$ всех экскурсий. *Н. К. Верещагин*
	4.	Пусть $C(n)$ — количество различных простых делителей числа n.
2	а)	Конечно или бесконечно число таких пар натуральных чисел (a, b), что $a \neq b$ и $$C(a+b) = C(a) + C(b)?$$
3	б)	А если при этом дополнительно требуется, чтобы $C(a+b) > 1000$? *Г. К. Жуков*
5	5.	Из 239 неотличимых на вид монет две — одинаковые фальшивые, а остальные — одинаковые настоящие, отличающиеся от фальшивых по весу. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь выяснить, какая монета тяжелее — фальшивая или настоящая? Сами фальшивые монеты находить не нужно. *К. А. Кноп*

ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЕРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 21 октября 2012 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи
4	1. В числе не меньше 10 разрядов, в его записи используются только две разные цифры, причем одинаковые цифры не стоят рядом. На какую наибольшую степень двойки может делиться такое число? *И. И. Богданов*
5	2. Чичиков играет с Ноздревым. Сначала Ноздрев раскладывает 222 ореха по двум коробочкам. Посмотрев на раскладку, Чичиков называет любое целое число N от 1 до 222. Далее Ноздрев перекладывает, если надо, один или несколько орехов в пустую третью коробочку и предъявляет Чичикову одну или две коробочки, где в сумме ровно N орехов. В результате Чичиков получит столько мертвых душ, сколько орехов переложил Ноздрев. Какое наибольшее число душ может гарантировать себе Чичиков, как бы ни играл Ноздрев? *А. Подольский*
6	3. В некоторых клетках таблицы 11×11 стоят плюсы, причем всего плюсов четное количество. В каждом квадратике 2×2 этой таблицы тоже четное число плюсов. Докажите, что четно и число плюсов в 11 клетках главной диагонали таблицы. *Е. Бакаев*
7	4. Дан треугольник ABC. Пусть I — центр вписанной в него окружности, X, Y, Z — центры окружностей, вписанных в треугольники AIB, BIC и AIC соответственно. Оказалось, что центр окружности, вписанной в треугольник XYZ, совпадает с I. Обязательно ли тогда треугольник ABC равносторонний? *Б. Р. Френкин*
8	5. Машина ездит по кольцевой трассе по часовой стрелке. В полдень в две разных точки трассы встали два наблюдателя. К какому-то моменту машина проехала возле каждого наблюдателя не менее 30 раз. Первый наблюдатель заметил, что машина проезжала каждый следующий круг ровно на секунду быстрее, чем предыдущий. Второй заметил, что машина проезжала каждый следующий круг ровно на секунду медленнее, чем предыдущий. Докажите, что прошло не менее полутора часов. *В. Брагин*
	6.
4	а) Внутри окружности находится некоторая точка A. Через A провели две перпендикулярные прямые, которые пересекли окружность в четырех точках. Докажите, что центр масс этих точек не зависит от выбора таких двух прямых.
4	б) Внутри окружности находится правильный $2n$-угольник ($n \geq 2$), его центр A не обязательно совпадает с центром окружности. Лучи, выпущенные из A в вершины $2n$-угольника, высекают $2n$ точек на окружности. $2n$-угольник повернули так, что его центр остался на месте. Теперь лучи высекают $2n$ новых точек. Докажите, что их центр масс совпадает с центром масс старых $2n$ точек. *И. В. Митрофанов*
10	7. Петя и Вася играют в игру, правила которой таковы. Петя загадывает натуральное число x с суммой цифр 2012. За один ход Вася выбирает любое натуральное число a и узнает у Пети сумму цифр числа $\|x - a\|$. Какое наименьшее число ходов необходимо сделать Васе, чтобы гарантированно определить x? *С. Сафин*

ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЕРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 21 октября 2012 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4

1. Дана бесконечная последовательность чисел a_1, a_2, a_3, … Известно, что для любого номера k можно указать такое натуральное число t, что $a_k = a_{k+t} = a_{k+2t} = \ldots$ Обязательно ли тогда эта последовательность периодическая, то есть существует ли такое натуральное T, что $a_k = a_{k+T}$ при любом натуральном k?

Л. Штейнгарц

5

2. Чичиков играет с Ноздревым. Сначала Ноздрев раскладывает 1001 орех по трем коробочкам. Посмотрев на раскладку, Чичиков называет любое целое число N от 1 до 1001. Далее Ноздрев перекладывает, если надо, один или несколько орехов в пустую четвертую коробочку и предъявляет Чичикову одну или несколько коробочек, где в сумме ровно N орехов. В результате Чичиков получит столько мертвых душ, сколько орехов переложил Ноздрев. Какое наибольшее число душ может гарантировать себе Чичиков, как бы ни играл Ноздрев?

А. Подольский

6

3. Машина ездит по кольцевой трассе по часовой стрелке. В полдень в две разных точки трассы встали два наблюдателя. К какому-то моменту машина проехала возле каждого наблюдателя не менее 30 раз. Первый наблюдатель заметил, что машина проезжала каждый следующий круг ровно на секунду быстрее, чем предыдущий. Второй заметил, что машина проезжала каждый следующий круг ровно на секунду медленнее, чем предыдущий. Докажите, что прошло не менее полутора часов.

В. Брагин

8

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны соответственно точки C_1 и A_1, отличные от вершин. Пусть K — середина A_1C_1, а I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Оказалось, что четырехугольник A_1BC_1I вписанный. Докажите, что угол AKC тупой.

А. А. Полянский

8

5. Петя и Вася играют в игру, правила которой таковы. Петя загадывает натуральное число x с суммой цифр 2012. За один ход Вася выбирает любое натуральное число a и узнает у Пети сумму цифр числа $|x-a|$. Какое наименьшее число ходов необходимо сделать Васе, чтобы гарантированно определить x?

С. Сафин

6.

5

а) Внутри сферы находится некоторая точка A. Через A провели три попарно перпендикулярные прямые, которые пересекли сферу в шести точках. Докажите, что центр масс этих точек не зависит от выбора такой тройки прямых.

5

б) Внутри сферы находится икосаэдр, его центр A не обязательно совпадает с центром сферы. Лучи, выпущенные из A в вершины икосаэдра, высекают 12 точек на сфере. Икосаэдр повернули так, что его центр остался на месте. Теперь лучи высекают 12 новых точек. Докажите, что их центр масс совпадает с центром масс старых 12 точек.

(Напомним, что икосаэдр — это правильный многогранник, у которого 20 треугольных граней и в каждой вершине сходятся 5 граней.)

И. В. Митрофанов

10

7. Клетчатая полоска $1 \times 1\,000\,000$ разбита на 100 сегментов. В каждой клетке записано целое число, причем в клетках, лежащих в одном сегменте, числа совпадают. В каждую клетку поставили по фишке. Затем сделали такую операцию: все фишки одновременно передвинули, каждую — на то количество клеток вправо, которое указано в ее клетке (если число отрицательно, то фишка двигается влево); при этом оказалось, что в каждую клетку снова попало по фишке. Эту операцию повторяют много раз. Для каждой фишки первого сегмента посчитали, через сколько операций она впервые снова окажется в этом сегменте. Докажите, что среди посчитанных чисел не более 100 различных.

И. В. Митрофанов

ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 24 февраля 2013 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты).

баллы	задачи	
3	1.	На плоскости даны шесть точек. Известно, что их можно разбить на две тройки так, что получатся два треугольника. Всегда ли можно разбить эти точки на две тройки так, чтобы получились два треугольника, которые не имеют друг с другом никаких общих точек (ни внутри, ни на границе)?
4	2.	Одной операцией к числу можно либо прибавить 9, либо стереть в нем в любом месте цифру 1. Из любого ли натурального числа A при помощи таких операций можно получить число $A + 1$? (Замечание: если стирается единица в самом начале числа, а за ней сразу идут нули, то эти нули тоже стираются.)
4	3.	Даны 11 гирь разного веса (одинаковых нет), каждая весит целое число граммов. Известно, что как ни разложить гири (все или часть) на две чаши, чтобы гирь на них было не поровну, всегда перевесит чаша, на которой гирь больше. Докажите, что хотя бы одна из гирь весит более 35 граммов.
5	4.	На доске 8×8 стоят 8 не бьющих друг друга ладей. Все клетки доски распределяются во владения этих ладей по следующему правилу. Клетка, на которой стоит ладья, отдается этой ладье. Клетку, которую бьют две ладьи, получает та из ладей, которая ближе к этой клетке; если же эти две ладьи равноудалены от клетки, то каждая из них получает по полклетки. Докажите, что площади владений всех ладей одинаковы.
5	5.	В четырёхугольнике $ABCD$ угол B равен 150°, угол C прямой, а стороны AB и CD равны. Найдите угол между стороной BC и прямой, проходящей через середины сторон BC и AD.

ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 24 февраля 2013 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
3	1. Одной операцией к числу можно либо прибавить 9, либо стереть в нем в любом месте цифру 1. Из любого ли натурального числа A при помощи таких операций можно получить число $A+1$? (Замечание: если стирается единица в самом начале числа, а за ней сразу идут нули, то эти нули тоже стираются.)
4	2. На катетах прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C вовне построили квадраты $ACKL$ и $BCMN$. Пусть CE — высота, опущенная на гипотенузу AB. Докажите, что угол LEM прямой.
4	3. На доске 8×8 стоят 8 не бьющих друг друга ладей. Все клетки доски распределяются во владения этих ладей по следующему правилу. Клетка, на которой стоит ладья, отдается этой ладье. Клетку, которую бьют две ладьи, получает та из ладей, которая ближе к этой клетке; если же эти две ладьи равноудалены от клетки, то каждая из них получает по полклетки. Докажите, что площади владений всех ладей одинаковы.
4	4. Имеются 100 камней разного веса (одинаковых нет), к каждому приклеена этикетка с указанием его веса. Хулиган Гриша хочет переклеить этикетки так, чтобы общий вес любого набора с числом камней от 1 до 99 отличался от суммы весов, указанных на этикетках из этого набора. Всегда ли он может это сделать?
5	5. Назовем приведенный квадратный трехчлен с целыми коэффициентами *сносным*, если его корни — целые числа, а коэффициенты не превосходят по модулю 2013. Вася сложил все сносные квадратные трехчлены. Докажите, что у него получился трехчлен, не имеющий действительных корней.

ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЕРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 10 марта 2013 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

баллы	задачи	
4	1.	На доске написано несколько натуральных чисел. Сумма любых двух из них — натуральная степень двойки. Какое наибольшее число различных может быть среди чисел на доске?
4	2.	Двадцать детей — десять мальчиков и десять девочек — встали в ряд. Каждый мальчик сказал, сколько детей стоит справа от него, а каждая девочка — сколько детей стоит слева от нее. Докажите, что сумма чисел, названных мальчиками, равна сумме чисел, названных девочками.
5	3.	Можно ли в клетках таблицы 19×19 отметить несколько клеток так, чтобы во всех квадратах 10×10 было разное количество отмеченных клеток?
5	4.	По кругу расставили 1000 ненулевых чисел и раскрасили их поочередно в белый и черный цвета. Оказалось, что каждое черное число равно сумме двух соседних с ним белых чисел, а каждое белое число равно произведению двух соседних с ним черных чисел. Чему может быть равна сумма всех 1000 чисел?
6	5.	Назовем точку на плоскости узлом, если обе ее координаты — целые числа. Дан треугольник с вершинами в узлах, внутри него расположено ровно два узла. Докажите, что прямая, проходящая через эти два узла, либо проходит через одну из вершин треугольника, либо параллельна одной из его сторон.
8	6.	Пусть I — центр вписанной окружности прямоугольного треугольника ABC, касающейся катетов AC и BC в точках B_0 и A_0 соответственно. Перпендикуляр, опущенный из A_0 на прямую AI, и перпендикуляр, опущенный из B_0 на прямую BI, пересекаются в точке P. Докажите, что прямые CP и AB перпендикулярны.
9	7.	В школе решили провести турнир по настольному теннису между математическими и гуманитарными классами. Команда гуманитариев состоит из m человек, команда математиков — из n, причем $m \neq n$, а стол для игры всего один. Поэтому было решено играть следующим образом. Сначала какие-то два ученика из разных команд играют между собой, а все остальные участники выстраиваются в одну общую очередь. После каждой игры тот, кто стоит первым в очереди, заменяет за столом члена своей команды и играет с оставшимся за столом. А человек, которого заменили, становится в конец очереди. Докажите, что рано или поздно каждый математик сыграет с каждым гуманитарием.

ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЕРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 10 марта 2013 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
3	1.	На доске написано несколько натуральных чисел. Сумма любых двух из них — натуральная степень двойки. Какое наибольшее число различных может быть среди чисел на доске?
4	2.	На длинной скамейке сидели мальчик и девочка. Затем по одному пришли еще 20 детей, и каждый садился между какими-то двумя уже сидящими. Назовем девочку отважной, если она садилась между двумя соседними мальчиками, а мальчика — отважным, если он садился между двумя соседними девочками. В итоге оказалось, что мальчики и девочки на скамейке чередуются. Можно ли наверняка сказать, сколько отважных среди детей на скамейке?
6	3.	Назовем точку на плоскости узлом, если обе ее координаты — целые числа. Дан треугольник с вершинами в узлах, внутри него расположено не меньше двух узлов. Докажите, что найдется прямая, проходящая через два каких-то узла внутри треугольника, которая либо проходит через одну из вершин треугольника, либо параллельна одной из его сторон.
6	4.	Числа 1, 2, ..., 100 стоят по кругу в некотором порядке. Может ли случиться, что у любых двух соседних чисел модуль разности не меньше 30, но не больше 50?
7	5.	На бесцветной плоскости покрасили три произвольные точки: одну — в красный цвет, другую — в синий, третью — в желтый. Каждым ходом выбирают на плоскости любые две точки двух из этих цветов и окрашивают еще одну точку в оставшийся цвет так, чтобы эти три точки образовали равносторонний треугольник, в котором цвета вершин идут в порядке «красный, синий, желтый» (по часовой стрелке). При этом разрешается красить и уже окрашенную точку плоскости (считаем, что точка может иметь одновременно несколько цветов.) Докажите, что сколько бы ходов ни было сделано, все точки одного цвета будут лежать на одной прямой.
	6.	Даны пять различных положительных чисел, сумма квадратов которых равна сумме всех десяти их попарных произведений.
4	а)	Докажите, что среди пяти данных чисел найдутся три, которые не могут быть длинами сторон одного треугольника.
5	б)	Докажите, что таких троек найдется не менее шести (тройки, отличающиеся только порядком чисел, считаем одинаковыми).
	7.	Для прохождения теста тысячу мудрецов выстраивают в колонну. Из колпаков с номерами от 1 до 1001 один прячут, а остальные в случайном порядке надевают на мудрецов. Каждый видит только номера на колпаках всех впереди стоящих. Далее мудрецы по порядку от заднего к переднему называют вслух целые числа. Каждое число должно быть от 1 до 1001, причем нельзя называть то, что уже было сказано. Результат теста — число мудрецов, назвавших номер своего колпака. Мудрецы заранее знали условия теста и могли договориться, как действовать.
5	а)	Могут ли они гарантировать результат более 500?
7	б)	Могут ли они гарантировать результат не менее 999?

ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 14 марта 2013 г.

1. На координатной плоскости нарисованы графики нескольких многочленов. Всегда ли можно дорисовать график ещё какого-нибудь многочлена так, чтобы он не пересекался с уже нарисованными?

2. В квадратной таблице 10×10 записано сто положительных чисел. Сумма чисел в каждой строке равна 100. Коле разрешается переставить числа внутри каждой из строк (но не между строками). После этого в каждом столбце найдут максимальное число и сложат найденные числа. Докажите, что Коля может добиться того, чтобы полученная сумма была меньше 300.

3. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся сторон BC, CA и AB в точках X, Y и Z соответственно. На плоскости отметили точку K. Серединные перпендикуляры к отрезкам KX, KY и KZ пересекают прямые BC, CA и AB в точках X_1, Y_1 и Z_1 соответственно. Докажите, что точки X_1, Y_1 и Z_1 лежат на одной прямой.

4. Конечно или бесконечно множество натуральных чисел, у которых как в десятичной записи, так и в семеричной записи нет нуля?

5. У Клары есть комплект всевозможных бус из $4n$ бусинок, где каждая бусинка либо чёрная, либо белая. Карл испортил один экземпляр, переставив в нем бусинки. Клара хочет перекрасить как можно меньше бусинок в испорченном экземпляре, чтобы снова получились прежние бусы. Какое наибольшее число бусинок ей может понадобиться перекрасить? (Бусы, отличающиеся поворотом или переворотом, считаются одинаковыми.)

6. Даны 1 000 000 окружностей, проходящих через одну точку. Докажите, что их можно разбить на 12 групп так, что среди окружностей одной группы ни одна не будет проходить через центр другой.

1. *На координатной плоскости нарисованы графики нескольких многочленов. Всегда ли можно дорисовать график еще какого-нибудь многочлена так, чтобы он не пересекался с уже нарисованными?*

Решение 1. Мы будем пользоваться тем *фактом*, что любой многочлен четной степени с положительным старшим коэффициентом принимает минимальное значение в некоторой точке.

Обозначим данные многочлены через $Q_i(x)$. Рассмотрим многочлен $P(x) = x^{2n}$, где $2n > \deg Q_i$ для всех i. Покажем, что к P можно прибавить константу c так, что график $P + c$ не пересечет ни одного из графиков Q_i. Для этого заметим, что $P - Q_i$ — многочлены четной степени, а, значит, достигают своих минимальных значений m_i. Но тогда, положив $c = \max_i(-m_i + 1)$, мы получим искомый многочлен.

Решение 2. В тех же обозначениях положим $P = Q_1^2 + \ldots + Q_n^2 + 1$. Заметим, что при любом i и любом x верно неравенство $Q_1^2(x) - Q_1(x) + 1 + Q_2^2(x) + \ldots + Q_n^2(x) > 0$, т.к. $a^2 - a + 1 > 0$ при любом a. Значит, $P(x) > Q_1(x)$. Аналогично, $P(x) > Q_i(x)$, и график P не пересекается ни с одним из графиков Q_i..

2. *В квадратной таблице 10×10 записано сто положительных чисел. Сумма чисел в каждой строке равна 100. Коле разрешается переставить числа внутри каждой из строк (но не между строками). После этого в каждом столбце найдут максимальное число и сложат найденные числа. Докажите, что Коля может добиться того, чтобы полученная сумма была меньше 300.*

Пусть Коля переставит числа в каждой строке в порядке невозрастания. Покажем, что эта перестановка — требуемая.

Рассмотрим i-й столбец. Пусть максимальное число в нём равно m_i; оно стоит в некоторой строке. Тогда в первых i клетках этой строки стоят числа, не меньшие m_i. Значит, сумма чисел в этой строке не меньше im_i; с другой стороны, она равна 100. Итак, $m_i \leq \dfrac{100}{i}$.

В итоге, можно оценить сумму найденных чисел как

$$\sum_{i=1}^{10} m_i \leq 100 \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{i} = 100 \cdot \frac{7381}{2520} < 300,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Сумму обратных необязательно вычислять явно. Достаточно, например, заметить, что она равна

$$1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3.$$

3. *В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся сторон BC, CA и AB в точках X, Y и Z соответственно. На плоскости отметили точку K. Серединные перпендикуляры к отрезкам KX, KY и KZ пересекают прямые BC, CA и AB в точках X_1, Y_1 и Z_1 соответственно. Докажите, что точки X_1, Y_1 и Z_1 лежат на одной прямой.*

Пусть ℓ — радикальная ось вписанной окружности ω треугольника ABC и точки K (рассматриваемой как окружность нулевого радиуса). Заметим, что ℓ существует, поскольку K отлична от центра ω (в противном случае рассматриваемые перпендикуляры параллельны соответствующим сторонам). Тогда равенство $X_1X = X_1K$ означает, что X_1 лежит на ℓ; аналогично, точки Y_1 и Z_1 также лежат на ℓ.

4. *Конечно или бесконечно множество натуральных чисел, у которых как в десятичной записи, так и в семеричной записи нет нуля?*

Ответ. Бесконечно.

При любом натуральном n положим $a_n = 7^n + 7^{n-1} + \cdots + 7 + 1$. Покажем, что к a_n можно прибавить несколько различных степеней семёрки, не превосходящих 7^n, чтобы получилось число b_n без нулей в десятичной записи. Тогда семеричная запись b_n будет состоять из единиц и двоек. Ясно, что таким образом мы построим бесконечно много различных чисел b_n, удовлетворяющих условию.

Итак, рассмотрим десятичную запись числа a_n; рассмотрим первый *слева* ноль в ней (если он есть). Пусть он стоит в i-м разряде *справа* (разряд единиц считаем нулевым). Найдётся степень семёрки 7^k, лежащая между 10^i и $7 \cdot 10^i$; заметим, что она меньше a_n, и поэтому меньше 7^{n+1}. После прибавления её к a_n перехода из i-го разряда не произойдёт (так как первая цифра 7^k меньше 9), при этом в i-м разряде окажется не ноль.

Значит, в полученном числе первый слева ноль в десятичной записи (если он есть) расположен правее, чем в a_n; применим к этому нулю то же действие (при этом мы прибавим меньшую степень семёрки, чем в предыдущий раз). Продолжая так дальше, в результате мы построим требуемое число b_n.

5. *У Клары есть комплект всевозможных бус из $4n$ бусинок, где каждая бусинка либо чёрная, либо белая. Карл испортил один экземпляр, переставив в нем бусинки. Клара хочет перекрасить как можно меньше бусинок в испорченном экземпляре, чтобы снова получились прежние бусы. Какое наибольшее число бусинок ей может понадобиться перекрасить? (Бусы, отличающиеся поворотом или переворотом, считаются одинаковыми.)*

Ответ. $2n$ бусинок.

Покажем сначала, что всегда возможно перекрасить не более $2n$ бусинок. Пусть в испорченных бусах w белых и $b = 4n - w$ чёрных бусинок. Мысленно наложим исходные бусы на испорченные $4n$ способами, отличающимися поворотами. Тогда каждая бусинка исходных бус по одному разу наложится на каждую бусинку испорченных. Значит, всего будет b^2 наложений чёрной бусинки на чёрную и w^2 наложений белой на белую. Тогда в каком-то из $4n$ способов будет не меньше, чем $\dfrac{b^2+w^2}{4n} \geq \dfrac{(b+w)^2}{8n} = 2n$ наложений одноцветных бусинок. Теперь достаточно перекрасить все бусинки испорченных бус, на которые в этом наложении накладываются бусинки другого цвета.

Осталось привести пример, когда не удастся обойтись меньшим числом перекрашиваний. Пусть исходные бусы выглядели как ⋯-○●●○○●●○○●-⋯, а Карл их переставил в порядке ⋯-○●○●○●○●○●-⋯. Легко видеть, что для получения исходных бус среди любых четырёх бусинок подряд надо перекрасить не меньше двух, значит, всего потребуется не менее $2n$ перекрашиваний.

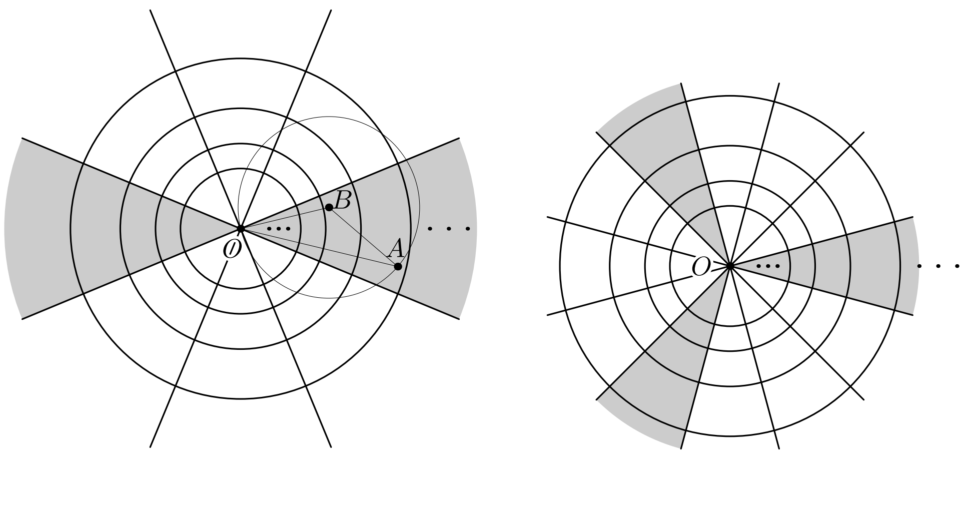
Замечание. Из оценки видно, что в любом экстремальном примере должно быть $2n$ чёрных и $2n$ белых бусинок.

6. *Даны 1 000 000 окружностей, проходящих через одну точку. Докажите, что их можно разбить на 12 групп так, что среди окружностей одной группы ни одна не будет проходить через центр другой. Пусть все окружности проходят через точку O. Проведём через O четыре прямых, разбивающих плоскость на 8 углов по $45°$, так, чтобы ни один центр окружности не лежал на этих прямых. Мы разобьём окружности, центры которых лежат в двух вертикальных углах, на три группы, удовлетворяющие условию; сделав так с каждой парой вертикальных углов, получим требуемое.*

Разобьём всю плоскость, кроме точки O, на такие кольца с центром в O, что отношение внешнего и внутреннего радиусов каждого кольца равно $\sqrt{2}$. Будем считать, что внешняя окружность каждого кольца принадлежит ему, а внутренняя — нет. Занумеруем все кольца последовательно целыми числами: $\ldots, R_{-1}, R_0, R_1, \ldots$. Поместим в первую, вторую и третью группы все окружности, центры которых лежат в кольцах R_{3i+1}, R_{3i+2} и R_{3i} соответственно (при целых i); напомним, что мы имеем дело лишь с окружностями, центры которых лежат в двух вертикальных углах. Мы утверждаем, что это разбиение — искомое.

Пусть A и B — центры двух окружностей ω_A и ω_B, причём A лежит на ω_B, то есть $OB = AB$. В частности, это значит, что $\angle AOB$ острый, поэтому точки лежат в одном угле, и $\angle AOB < 45°$. Значит, $\angle ABO = 180° - 2\angle AOB > 90°$; Отсюда $OA^2 > AB^2 + OB^2 = 2OB^2$, и точка A лежит в кольце с бо́льшим номером, чем B. С другой стороны, $OA \leq OB + AB = (\sqrt{2})^2 AB$; значит, эти номера различаются не более, чем на 2. Поэтому A и B попали в разные группы, что и требовалось.

Замечание. Можно проделать аналогичную процедуру, разбив плоскость на 12 углов по $30°$ и объединив их в группы по три, как показано на рисунке справа. В этом случае отношение радиусов колец может быть любым в пределах от $\sqrt{2}$ до $\sqrt{3}$.



TOURNAMENT OF TOWNS

Junior O-Level Paper **Fall 2012.**

1. Five students have the first names Clark, Donald, Jack, Robin and Steve, and have the last names (in a different order) Clarkson, Donaldson, Jackson, Robinson and Stevenson. It is known that Clark is 1 year older than Clarkson, Donald is 2 years older than Donaldson, Jack is 3 years older than Jackson, Robin is 4 years older than Robinson.

Who is older, Steve or Stevenson and what is the difference in their ages?

Solution. The sum of ages of Clark, Donald, Jack, Robin and Steve is equal to the sum of ages of Clarkson, Donaldson, Jackson, Robinson and Stevenson. Hence Stevenson is older than Steve, and the difference is $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ years.

2. Let $C(n)$ be the number of prime divisors of a positive integer n. (For example, $C(10) = 2$, $C(11) = 1$, $C(12) = 2$).

Consider set S of all pairs of positive integers (a, b) such that $a \neq b$ and

$$C(a + b) = C(a) + C(b).$$

Is set S finite or infinite?

Solution. The set of pairs is infinite. *Example 1*. $a = 2^k$, $b = 2^{k+1}$, $(a + b) = 3 \cdot 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$. Then $C(a) = 1$, $C(b) = 1$, $C(a + b) = 2$.

Example 2 (based on different idea). Let $a = p$, $b = 5p$, $(a+b) = 6p = 2 \cdot 3 \cdot p$. Let $p \neq 2, 3, 5$ is a prime. Then, $C(a) = 1$, $C(b) = 2$, $C(a + b) = 3$.

3. A table 10×10 was filled according to the rules of the game "Bomb Squad": several cells contain bombs (one bomb per cell) while each of the remaining cells contains a number, equal to the number of bombs in all cells adjacent to it by side or by vertex.

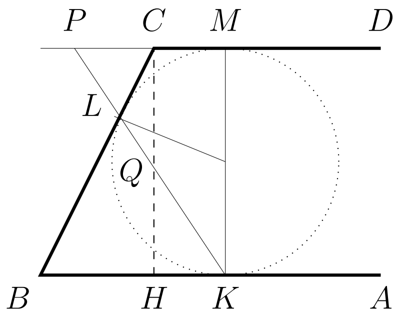
Then the table is rearranged in the "reverse" order: bombs are placed in all cells previously occupied with numbers and the remaining cells are filled with numbers according to the same rule. Can it happen that the total sum of the numbers in the table will increase in a result?

Solution. The answer is no. In a given table consider all unordered pairs of adjacent cells (by side or by vertex) one of which has a bomb and another is empty (two pairs are different it they differ in at least one cell). It is clear that the sum of all numbers in the table equals to the number of these pairs.

For the complementary table (bomb and no-bomb cells reversed) we have the same number of such pairs. Therefore the sum of the numbers in the complementary table will be the same as in the original table.

4. A circle touches sides AB, BC, CD of a parallelogram $ABCD$ at points K, L, M respectively. Prove that the line KL bisects the height of the parallelogram drawn from the vertex C to AB.

Solution. Let CH be the height dropped from the vertex C to the side AB. Let P and Q be the points of intersection of line KL with CD and CH respectively.



Observe that $BK = BL$ and $CL = CM$ (as tangents to a circle) and that triangles BLK and PCL are similar (angle–angle criteria). Therefore the triangle LPC is isosceles, $CP = CL$ and therefore $PC = CM$. Hence, CH is the midline in triangle PMK, so $CQ = MK/2 = CH/2$.

5. For a class of 20 students several field trips were arranged. In each trip at least one student participated. Prove that there was a field trip such that each student who participated in it took part in at least 1/20-th of all field trips.

Solution. Let n be the number of trips. Let us call a student "enthusiastic " if he/she took part in at least than $n/20$ of trips, and an "ordinary" student otherwise.

Let k_i be the number of trips that i-th ordinary student participated ($i \leq 20$). Then the sum of attendances of the ordinary students is $k_1 + k_2 + \cdots < 20 \times n/20 = n$. Since the number of trips is n, there was a trip free of ordinary students.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior O-Level Paper **Fall 2012.**

1. A table 10×10 was filled according to the rules of the game "Bomb Squad": several cells contain bombs (one bomb per cell) while each of the remaining cells contains a number, equal to the number of bombs in all cells adjacent to it by side or by vertex.

Then the table is rearranged in the "reverse" order: bombs are placed in all cells previously occupied with numbers and the remaining cells are filled with numbers according to the same rule. Can it happen that the total sum of the numbers in the table will increase in a result?

Solution. The answer is no. In a given table consider all unordered pairs of adjacent cells (by side or by vertex) one of which has a bomb and another is empty (two pairs are different it they differ in at least one cell). It is clear that the sum of all numbers in the table equals to the number of these pairs.

For the complementary table (bomb and no-bomb cells reversed) we have the same number of such pairs. Therefore the sum of the numbers in the complementary table will be the same as in the original table.

2. Given a convex polyhedron and a sphere intersecting each its edge at two points so that each edge is trisected (divided into three equal parts). Is it necessarily true that all faces of the polyhedron are

(a) congruent polygons?

(b) regular polygons?

Solution. a) The answer is negative. Consider a regular prism with triangular base and square lateral faces. On each edge, mark the trisecting points. Clearly they are equidistant from the centre of the prism and thus belong to the corresponding sphere.

b) The answer is positive. Suppose $A_1 \dots A_n$ is a face of the polyhedron. All the points B_i, C_i trisecting its sides $A_{i-1}A_i$ lie on the same circle that is the intersection of the sphere with the plane of the face. Suppose $A_{i-1}A_i = 3a$, $A_iA_{i+1} = 3b$. By secant theorem, $A_iB_i \cdot A_iC_i = A_iB_{i+1} = A_iC_{i+1} \Leftrightarrow 2a^2 = 2b^2 \Leftrightarrow a = b$. Hence the face is equilateral. It remains to prove that it has equal angles. All segments B_iC_i are equal as well as isosceles triangles B_iOC_i where O is the centre of the circle. Hence the equality holds for all triangles B_iOA_i, all angles B_iA_iO and all angles $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1} = 2\angle B_iA_iO$.

3. For a class of 20 students several field trips were arranged. In each trip at least four students participated. Prove that there was a field trip such that each student who participated in it took part in at least 1/17-th of all field trips.

Solution. Let n be the number of arranged trips. Let us call a student "enthusiastic " if he/she took part in at least $n/17$ of trips, and "ordinary" otherwise. Assume that there was no trip attended by only enthusiastic students. Choose an ordinary student in each trip. The total number of their attendances is at least n, the number of attendances of each ordinary student is less than $n/17$, so the number of chosen students exceeds 17, and the number of enthusiastic students is at most 2. Then the total number of their attendances is at most $2n$, and for the ordinary students this number is less than $n/17 \cdot 20$. So the total number of all attendances is less than $4n$, a contradiction with the condition of the problem. Therefore, there was a trip attended by only enthusiastic students.

4. Let $C(n)$ be the number of prime divisors of a positive integer n.

(a) Consider set S of all pairs of positive integers (a, b) such that $a \neq b$ and

$$C(a+b) = C(a) + C(b)$$

Is S finite or infinite?

(b) Define S' as a subset of S consisting of the pairs (a, b) such that $C(a+b) > 1000$. Is S' finite or infinite?

Solution.

(a) S is infinite. *Example 1.* $a = 2^k$, $b = 2^{k+1}$, $(a+b) = 3 \cdot 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$. Then $C(a) = 1$, $C(b) = 1$, $C(a+b) = 2$.
Example 2 (based on different idea). Let $a = p$, $b = 5p$, $(a+b) = 6p = 2 \cdot 3 \cdot p$. Let $p \neq 2, 3, 5$ is a prime. Then $C(a) = 1$, $C(b) = 2$, $C(a+b) = 3$.

(b) S' is infinite. Let $p_1, p_2, \ldots, p_k$ be the first prime numbers, where $k > 1000$.
Then we can write $p_1 p_2 \ldots p_k - 1 = P_1^{r_1} P_2 \ldots P_s^{r_s}$, where $P_i \neq p_j$ are also primes and $0 < s < k$. Let $m = k - s$ and let us choose primes $q_1, q_2, \ldots, q_m$, so that $q_i \neq P_j$ and $q_i \neq p_l$. Finally, consider a and b of the form $a = q_1 q_2 \ldots q_m$, $b = q_1 q_2 \ldots q_m P_1^{r_1} P_2 \ldots P_s^{rs}$, so that $(a+b) = q_1 q_2 \ldots q_m p_1 p_2 \ldots p_k$. Then $C(a) = m$, $C(b) = m + s$, $C(a+b) = m + k$ and $C(a+b) = C(a) + C(b)$ is equivalent to $m + s = k$. Since there is an infinite number of primes we can always choose an infinite number of different $q_1, q_2, \ldots, q_m$ and therefore create an infinite number of different pairs (a, b) satisfying the conditions.

5. Among 239 coins identical in appearance there are two counterfeit coins. Both counterfeit coins have the same weight different from the weight of a genuine coin.

Using a simple balance, determine in three weighings whether the counterfeit coin is heavier or lighter than the genuine coin. A simple balance shows if both sides are in equilibrium or left side is heavier or lighter. It is not required to find the counterfeit coins.

Solution (one of possible versions). Split coins in three groups A (80), B (80), C (79). On Step 1: we weigh A **?** B.

(1) If $A = B$ then either both A and B consist of genuine coins or there is one counterfeit coin in each group. Split A into the groups A_1 (40) and A_2 (40). On Step 2: A_1 **?** A_2.

  (a) If $A_1 = A_2$ then A_1 consists of real coins (so does B) and therefore both counterfeits are in the group C. Choose 79 coins from the group $A + B$; let it be A'. On Step 3: C **?** A':

    A. If $C > A'$ then the counterfeit coin is heavier and

    B. If $C < A'$ the counterfeit coin is lighter.

  (b) If $A_1 \neq A_2$, say $A_1 > A_2$, then both groups A and B contain a counterfeit coin and therefore all 79 coins in the group C are genuine.
  Choose 40 coins from the group C; let it be the group C'. On Step 3: A_1 **?** C'.

    A. If $A_1 = C'$ then the counterfeit coin is lighter and

    B. if $A_1 > C'$ then the counterfeit coin is heavier.
    The case $A_1 < C'$ is impossible.

(2) Let $A \neq B$, say $A > B$. Split A into the groups A_1 (40) and A_2 (40). On Step 2: A_1 **?** A_2.

  i. If $A_1 \neq A_2$ then the counterfeit coin is heavier, and the third weighing is not needed.

  ii. If $A_1 = A_2$ then either both groups contain a single counterfeit coin or all coins in these groups are genuine. Split A_1 into $A_1 1(20)$ and $A_1 2(20)$. On Step 3: $A_1 1$ **?** $A_1 2$.

    A. If $A_1 1 = A_1 2$ then all coins in $A_1 1$, $A_1 2$ and A_2 are genuine, B contains one or two counterfeit coins and these coins are lighter than genuine ones.

    B. If $A_1 1 \neq A_1 2$ then A contains a counterfeit coin, B does not, and counterfeit coins are heavier than genuine ones.

International Mathematics
TOURNAMENT OF TOWNS

Junior A-Level Paper **Fall 2012.**

1. The decimal representation of an integer uses only two different digits. The number is at least 10 digits long, and any two neighbouring digits are distinct. What is the greatest power of two that can divide this number?

Solution. The answer is 6. Let N be the given number. Consider the case when the number of digits of N is $2m$. Then N can be represented as $N = xyxy \dots xy = 1010 \dots 1 \times xy$. Since the first factor is odd, the greatest power of two that can divide N coincides with the greatest power of two that can divide xy, which is 6 (then $xy = 64 = 2^6$).

If N contains $2m+1$ digits then $N = yxy \dots xy = y \cdot 10^{2m} + xy \dots xy$ where $m \geq 5$ and therefore $2m \geq 10$. Then $y \cdot 10^{2m}$ is divisible by 2^7; therefore if N is divisible by 2^7 so is $xy \dots xy$, but it is divisible by at most 2^6 as is shown above. Hence the answer is 6.

2. Chip and Dale play the following game. Chip starts by splitting 222 nuts between two piles, so Dale can see it. In response, Dale chooses some number N from 1 to 222. Then Chip moves nuts from the piles he prepared to a new (third) pile until there will be exactly N nuts in any one or two piles. When Chip accomplishes his task, Dale gets an exact amount of nuts that Chip moved. What is the maximal number of nuts that Dale can get for sure, no matter how Chip acts?

(Naturally, Dale wants to get as many nuts as possible, while Chip wants to lose as little as possible).

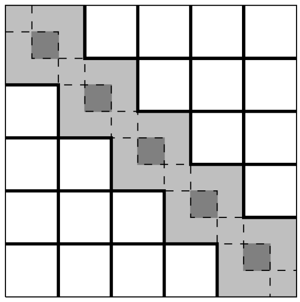
Solution The answer is 37. *Upper estimate.* If Chip puts 74 and 148 nuts in the piles, he can move not more 37 nuts for any N. Indeed, represent N as $74k + r$ where k equals 0, 1, 2, or 3, and $-37 \leq r < 37$. If $r = 0$ then $k > 0$, N equals 74, 148, or 222, and this is the number of nuts in one or two piles. If $r > 0$ then $74k$ equals 0, 74, or 148. Then Chip moves r nuts from an appropriate pile to a new pile and presents this pile to Dale, adding if necessary the pile that was not changed.

Lower estimate. For any initial splitting, there exists N such that at least 37 nuts must be moved. Indeed, let the numbers of nuts in the initial piles be p and q, $q \geq p$. If $p \geq 74$ then for $N = 37$ it is necessary to move 37 nuts. If $p < 74$ then $q > 148$. For $N = 111$ it is necessary either to add more than 37 to p nuts or to remove more than 37 from q nuts.

3. Some cells of a 11×11 table are filled with pluses. It is known that the total number of pluses in the given table and in any of its 2×2 sub-tables is even. Prove that the total number of pluses on the main diagonal of the given table is also even.

(2×2 sub-table consists of four adjacent cells, four cells around a common vertex).

Solution. Let us split the given square into 2×2 squares and a grey diagonal part as shown in the picture.



Since the given 11×11 square as well as any 2×2 square contains an even number of pluses, the diagonal part contains an even number of pluses.

We can obtain the main diagonal from the diagonal part by excluding two diagonal rows of 2×2 squares shown in dashed and including the double sum of every second square in the main diagonal (shown in dark grey).

Since the number of pluses in the part we include and in the part we exclude is even, the number of pluses in the main diagonal is also even.

4. Given a triangle ABC. Suppose I is its incentre, and X, Y, Z are the incentres of triangles AIB, BIC and AIC respectively. The incentre of triangle XYZ coincides with I. Is it necessarily true that triangle ABC is regular?

Solution. The answer is yes. Suppose K is the point of intersection of segments XY and BI, L is the intersection of YZ and CI, and M is the intersection of XZ and AI. By condition, segment XI bisects angles KIM and KXM, hence triangles IKX and IMX are congruent. Similarly, triangles IKY and ILY are congruent as well as ILZ and IMZ. Hence $\angle IKY = \angle ILY = 180° - \angle ILZ = 180° - \angle IMZ = \angle IMX = \angle IKX$, thus $BI \perp XY$.

In triangle XBY, segment BK is a bisector and an altitude, hence it is also a median, so line BI is the midperpendicular for segment XY. Hence $\angle XIK = \angle YIK$. But $\angle XIK = 1/2\angle AIB = 1/2(90° + 1/2\angle C)$. Similarly $\angle YIK = 1/2(90° + 1/2\angle A)$, thus $\angle A = \angle C$. Similarly $\angle A = \angle B$. Hence the triangle ACB is equilateral.

5. A car rides along a circular track in the clockwise direction. At noon Peter and Paul took their positions at two different points of the track. Some moment later they simultaneously ended their duties and compared their notes. The car passed each of them at least 30 times. Peter noticed that each circle was passed by the car 1 second faster than the preceding one while Paul's observation was opposite: each circle was passed 1 second slower than the preceding one.

Prove that their duty was at least an hour and a half long.

Solution. Each observer has noticed at least 29 circles. For Peter, the car passed consecutive circles in $m+14, m+13, \ldots, m-14$ seconds, and for Paul in $p-14, p-13, \ldots, p+14$ seconds. The total time for passing 29 circles is equal to $29m$ and $29p$ respectively. First 15 Paul's circles cover 14 Peter's circles, either from 1st to 14th (if the car passed Peter for the first time before Paul), or from 2nd to 15th (otherwise). In any case

$$(p-14)+(p-13)+\cdots+p > (m+13)+(m+12)+\cdots+m.$$

On the other hand, the last 15 Paul's circles cover 14 Peter's circles, either from 16th to 29th, or from 15th to 28th, hence

$$(m-14)+(m-13)+\cdots+m > (p+13)+(p+12)+\cdots+p.$$

Summing up the inequalities and collecting terms, we get $p+m > 392$, hence $29p+29m > 29 \cdot 392$. Thus the total time for at least one observer is at least $29 \cdot 196 = 5684$. This is greater than an hour and a half (5400 seconds).

6. **(a)** A point A is marked inside a circle. Two perpendicular lines drawn through A intersect the circle at four points. Prove that the centre of mass of these four points does not depend on the choice of the lines.

(b) A regular $2n$-gon ($n \geq 2$) with centre A is drawn inside a circle (A does not necessarily coincide with the centre of the circle). The rays going from A to the vertices of the $2n$-gon mark $2n$ points on the circle. Then the $2n$-gon is rotated about A. The rays going from A to the new locations of vertices mark new $2n$ points on the circle. Let O and N be the centres of gravity of old and new points respectively. Prove that $O = N$.

Solution. If A coincides with O, the assertion is obvious. Otherwise we will prove that the centre of mass is the midpoint of the segment OA.

a) Two perpendicular lines cut off two perpendicular chords. The centre of mass of a chord is its midpoint. If one of two chords is a diameter then the midpoint of the other one is A, so the centre of mass is the midpoint of OA. Otherwise let B and C be the midpoints of the chords. Then $OABC$ is a rectangle,and the centre of mass is the midpoint of BC which coincides with the midpoint of OA.

b) Connect the $2n$ points on the circle with A to obtain n chords such that the angle between two neighbouring ones is $180°/n$. The centre of mass of the endpoints of chords is the same as the centre of mass of their midpoints. These midpoints belong to a smaller circle with diameter OA. Equal inscribed angles correspond to equal arcs, thus these midpoints are vertices of a regular polygon inscribed in the smaller circle. Hence their centre of mass is the centre of this circle, that is, the midpoint of OA.

7. Peter and Paul play the following game. First, Peter chooses some positive integer a with the sum of its digits equal to 2012. Paul wants to determine this number; he knows only that the sum of the digits of Peter's number is 2012. On each of his moves Paul chooses a positive integer x and Peter tells him the sum of the digits of $|x-a|$. What is the minimal number of moves in which Paul can determine Peter's number for sure?

Solution. The answer is 2012. Let $S(n)$ be the sum of the digits of n.

Algorithm. At the first step, Paul chooses 1. If a ends with k zeroes then $S(a-1) = 2011+9k$. Thus Paul gets to know the position of the rightmost nonzero digit in a. Set $a_1 = a - 10^k$. Paul knows that $S(a_1) = 2011$. At the second step Paul chooses x such that $a - x = a_1 - 1$ and gets to know the number m of zeroes at the end of a_1. Set $a_2 = a_1 - 10^m$ and so on. After the 2012th step Paul obtains $S(a_{2012}) = 0$, thus having determined a.

Estimate. Suppose all digits in a are 0 and 1, that is, $a = 10^{k_{2012}} + 10^{k_{2011}} + \cdots + 10^{k_1}$ where $k_{2012} > k_{2011} > \cdots > k_1$. It is possible that at the first step Paul chooses an integer $x < 10^{k_1}$. Then $S(a-x) = S(10^{k_1} - x) + 2011$ independently of values of $k_{2012}, \ldots, k_{i+1}$. So Paul gets no new information about $k_{2012}, \ldots, k_{i+1}$. Similarly, it is possible that at the second step Paul chooses an integer smaller than 10^{k_2}, and so on. Then after 2011 steps Paul does not know k_{2012}.

International Mathematics
TOURNAMENT OF TOWNS

Senior A-Level Paper **Fall 2012.**

1. Given an infinite sequence of numbers $a_1, a_2, a_3, \ldots$ For each positive integer k there exists a positive integer $t = t(k)$ such that $a_k = a_{k+t} = a_{k+2t} = \ldots$ Is this sequence necessarily periodic? That is, does a positive integer T exist such that $a_k = a_{k+T}$ for each positive integer k?

Solution. The answer is no. For example, let m_k be the highest degree of 2 that divides k, $a_k = 0$ if m_k is even and $a_k = 1$ if m_k is odd, and $t(k) = 2m_k$.

2. Chip and Dale play the following game. Chip starts by splitting 1001 nuts between three piles, so Dale can see it. In response, Dale chooses some number N from 1 to 1001. Then Chip moves nuts from the piles he prepared to a new (fourth) pile until there will be exactly N nuts in any one or more piles. When Chip accomplishes his task, Dale gets an exact amount of nuts that Chip moved. What is the maximal number of nuts that Dale can get for sure, no matter how Chip acts? (Naturally, Dale wants to get as many nuts as possible, while Chip wants to lose as little as possible).

Solution. Consider a line segment of length 1001 on which we mark points A, B and C corresponding to the piles with a, b and c nuts in them. Let us also mark the points $A+B$, $A+B$ and $B+C$, corresponding to two combined piles, the point O, corresponding to an empty pile, and the point $A+B+C$, corresponding to the pile of 1001 nuts. If Dale choses a number n then Chip's strategy is to look for the closest marked point to this number and to move nuts from the corresponding pile (or combined piles) to the pile 0. It is clear that if the points are marked uniformly (with the distance 143 between each pair of subsequent points) then the maximal difference between n and the closest number is 71, therefore Chip can loose at most 71 nuts.

On the other hand, since the maximal distance between the subsequent points is at least 143, Dale can always choose a number such that he can guarantee at least 71 nuts.

3. A car rides along a circular track in the clockwise direction. At noon Peter and Paul took their positions at two different points of the track. Some moment later they simultaneously ended their duties and compared their notes. The car passed each of them at least 30 times. Peter noticed that each circle was passed by the car 1 second faster than the preceding one while Paul's observation was opposite: each circle was passed 1 second slower than the preceding one.

Prove that their duty was at least an hour and a half long.

Solution. Each observer has noticed at least 29 circles. For Peter, the car passed consecutive circles in $m+14, m+13, \ldots, m-14$ seconds, and for Paul in $p-14, p-13, \ldots, p+14$ seconds. The total time for passing 29 circles is equal to $29m$ and $29p$ respectively. First 15 Paul's circles cover 14 Peter's circles, either from 1st to 14th (if the car passed Peter for the first time before Paul), or from 2nd to 15th (otherwise). In any case

$$(p-14)+(p-13)+\cdots+p>(m+13)+(m+12)+\cdots+m.$$

On the other hand, the last 15 Paul's circles cover 14 Peter's circles, either from 16th to 29th, or from 15th to 28th, hence

$$(m-14)+(m-13)+\cdots+m>(p+13)+(p+12)+\cdots+p.$$

Summing up the inequalities and collecting terms, we get $p+m>392$, hence $29p+29m>29\cdot 392$. Thus the total time for at least one observer is at least $29\cdot 196=5684$. This is greater than an hour and a half (5400 seconds).

4. In a triangle ABC two points, C_1 and A_1 are marked on the sides AB and BC respectively (the points do not coincide with the vertices). Let K be the midpoint of A_1C_1 and I be the incentre of the triangle ABC. Given that the quadrilateral A_1BC_1I is cyclic, prove that the angle AKC is obtuse.

Solution. Let M be the midpoint of AC, and A_2, B_2 and C_2 are touching points of the inscribed circle with sides BC, AC and AB respectively. Since $\angle A_1IC_1=180^\circ-\angle B=\angle A_2IC_2$, the right-angled triangles A_1A_2I and C_1C_2I are equal (by a cathetus and an acute angle). One of them is inside, and the other one outside the rectangle BA_2IC_2. Hence $AC_1+CA_1=AC_2+CA_2=AB_2+CB_2=AC$.

Construct parallelograms AC_1KD and CA_1KE. Then $ADCE$ is also a parallelogram (possibly degenerate) and M is its centre, that is, the midpoint of segment DE. As is well-known, a median is less than the half-sum of the adjacent sides, hence $KM<1/2(KD+KE)=1/2(AC_1+CA_1)=1/2AC$. This means that point K is inside the circle with diameter AC, hence angle AKC is obtuse.

5. Peter and Paul play the following game. First, Peter chooses some positive integer a with the sum of its digits equal to 2012. Paul wants to determine this number; he knows only that the sum of the digits of Peter's number is 2012. On each of his moves Paul chooses a positive integer x and Peter tells him the sum of the digits of $|x-a|$. What is the minimal number of moves in which Paul can determine Peter's number for sure?

Solution. The answer is 2012. Let $S(n)$ be the sum of the digits of n.

Algorithm. At the first step, Paul chooses 1. If a ends with k zeroes then $S(a-1) = 2011+9k$. Thus Paul gets to know the position of the rightmost nonzero digit in a. Set $a_1 = a - 10^k$. Paul knows that $S(a_1) = 2011$. At the second step Paul chooses x such that $a - x = a_1 - 1$ and gets to know the number m of zeroes at the end of a_1. Set $a_2 = a_1 - 10^m$ and so on. After the 2012th step Paul obtains $S(a_{2012}) = 0$, thus having determined a.

Estimate. Suppose all digits in a are 0 and 1, that is, $a = 10^{k_{2012}} + 10^{k_{2011}} + \cdots + 10^{k_1}$ where $k_{2012} > k_{2011} > \cdots > k_1$. It is possible that at the first step Paul chooses an integer $x < 10^{k_1}$. Then $S(a - x) = S(10^{k_1} - x) + 2011$ independently of values of $k_{2012}, \dots, k_{i+1}$. So Paul gets no new information about $k_{2012}, \dots, k_{i+1}$. Similarly, it is possible that at the second step Paul chooses an integer smaller than 10^{k_2}, and so on. Then after 2011 steps Paul does not know k_{2012}.

6. (a) A point A is marked inside a sphere. Three perpendicular lines drawn through A intersect the sphere at six points. Prove that the centre of gravity of these six points does not depend on the choice of such three lines.

(b) An icosahedron with the centre A is placed inside a sphere (its centre does not necessarily coincide with the centre of the sphere). The rays going from A to the vertices of the icosahedron mark 12 points on the sphere. Then the icosahedron is rotated about its centre. New rays mark new 12 points on the sphere. Let O and N be the centres of mass of old and new points respectively. Prove that $O = N$.

(An icosahedron is a regular polyhedron with 20 triangular faces; each vertex emits 5 edges).

Solution. Let C be the centre of the sphere, O the centre of mass in question. It is also the centre of mass for the midpoints of chords in the sphere, cut by the drawn lines. (For an icosahedron, by its central symmetry, pairs of opposite rays may be replaced by the lines containing the main diagonals.)

a) The midpoints of the chords (say K, L, M) are projections of C to the lines drawn, hence $\overline{AC} = \overline{AK} + \overline{AL} + \overline{AM}$ (a vector is the sum of its projections to three perpendicular axes). Hence $\overline{AO} = \frac{1}{3}\overline{AC}$.

b) Let $\overline{AO} = \mathbf{a}$, $\overline{AC} = \mathbf{c}$. It suffices to show that $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{c}$ where α is independent of $\mathbf{c}$ and of the position of the icosahedron.

The midpoints of the chords are projections of C to the diagonals of the icosahedron. Let $\mathbf{e}_i$ be the unit vector directed along the ith diagonal, A_i be the corresponding projection. Then $\overline{AA_i} = |\mathbf{c}| \cos\varphi \cdot \mathbf{e}_i = (\mathbf{c}, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i$ where brackets denote the scalar product and φ is the angle between $\mathbf{c}$ and $\mathbf{e}_i$, and $6\mathbf{a} = (\mathbf{c}, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + \cdots + (\mathbf{c}, \mathbf{e}_6)\mathbf{e}_6$. The last expression depends on $\mathbf{c}$ linearly, hence it suffices to prove the equation

$$(\mathbf{c}, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + \cdots + (\mathbf{c}, \mathbf{e}_6)\mathbf{e}_6 = 6\alpha\mathbf{c} \qquad (*)$$

for any three non-complanar vectors, for instance for $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

The results does not change if we replace some of $\mathbf{e}_i$ by opposite ones. Hence proving $(*)$ for $\mathbf{c} = \mathbf{e}_1$ we may assume that $\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_6$ are directed to the vertices closest to that one where $\mathbf{e}_1$ is directed. Then by symmetry we have $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \dots = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_6)$. But $\mathbf{e}_2 + \dots + \mathbf{e}_6 = \beta\mathbf{e}_1$ where β is a constant.

The equation $(*)$ for $\mathbf{c} = \mathbf{e}_2$ and $\mathbf{c} = \mathbf{e}_3$ is proved similarly.

Remark. As is clear from the above, $6\alpha = 1 + 5\cos^2\psi$ where ψ is the angle between two neighbouring diagonals of an icosahedron.

7. There are 1 000 000 soldiers in a line. The sergeant splits the line into 100 segments (the length of different segments may be different) and permutes the segments (not changing the order of soldiers in each segment) forming a new line. The sergeant repeats this procedure several times (splits the new line in segments of the same lengths and permutes them in exactly the same way as the first time). Every soldier originally from the first segment recorded the number of performed procedures that took him to return to the first segment for the first time. Prove that at most 100 of these numbers are different.

Solution. Let us mark 99 borders between segments by flags; during iterations, flags remain on their spots. We call a pair of soldiers *special* if originally they were neighbours in the first segment but returned to this segment after different number of iterations. Then clearly these soldiers at some moment went to different segments. Let us consider the first moment when it happened. Until this moment they were neighbours in the line, so they are still neighbours but now there is a flag between them.

We claim that *each special pair is served by its own dedicated flag* (so no flag can serve two special pairs). Assume that some flag F first separated two special pairs A and B; pair A was separated after k iterations and pair B was separated after $m > k$ iterations.

Note that our operations are invertible: positions of the soldiers on the previous step are uniquely defined. So let us pull k iterations back from the moment when flag F separated pair A the first time. Then soldiers from A return to their positions in the first segment.

Now pull k operations back from the moment m when the second pair got separated. Since the pair B occupied the same places at moment m as pair A at the moment k, this pair B also will return to the same place, which is in the first segment. However, time is $0 < m-k < m$ which contradicts to our conjecture that m was the first moment when it happened.

Therefore, the number of special pairs does not exceed 99. This means that going from one soldier to the next one along the first segment, the recorded numbers could change no more than 99 times and therefore there are at most 100 recorded numbers.

Remark. One can prove easily that each soldier from the first segment really returns to it. However it is not necessary: if a soldier never returns to the first segment we can define the return time equal to ∞ and this does not affect the above arguments.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS SOLUTIONS

Junior O-Level Paper **Spring 2013.**

1 [3] There are six points on the plane such that one can split them into two triples each creating a triangle. Is it always possible to split these points into two triples creating two triangles with no common point (neither inside, nor on the boundary)?

ANSWER: No.

Example: Consider the vertices and the midpoints of a triangle.

2 [4] There is a positive integer A. Two operations are allowed: increasing this number by 9 and deleting a digit equal to 1 from any position. Is it always possible to obtain $A+1$ by applying these operations several times?

REMARK. If leading digit 1 is deleted, all leading zeros are deleted as well.

ANSWER: Yes.

SOLUTION. Given the number $A+1$ create a "new number" which starts with eight "1"s followed by the number $A+1$. Note that the new number and the number A have the same remainders when divided by 9. Therefore given the number A one can get the number $A+1$ by adding "9"s to A until one obtains the "new number". Then one removes eight leading "1"s.

3 [4] Each of 11 weights is weighing an integer number of grams. No two weights are equal. It is known that if all these weights or any group of them are placed on a balance then the side with a larger number of weights is always heavier. Prove that at least one weight is heavier than 35 grams.

SOLUTION. Let us arrange the weights in increasing order, $a_1 < a_2 < a_3 \cdots < a_{11}$. Note that the difference between any two consequent weights is at least 1. Therefore, $a_n \geq a_m + (n-m)$, if $m < n$. According to the given we have

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_2 + a_6 > a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11}$$

and since

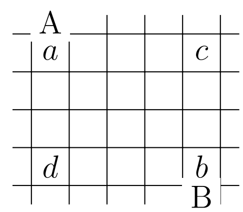
$$a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} \geq (a_2+5) + (a_3+5) + \ldots + (a_6+5) = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + 25$$

we have $a_1 > 25$. Then $a_{11} \geq a_1 + 10 > 35$.

4 [5] Eight rooks are placed on a 8×8 chessboard, so that no two rooks attack one another. All squares of the board are divided between the rooks as follows. A square where a rook is placed belongs to it. If a square is attacked by two rooks then it belongs to the nearest rook; in case these two rooks are equidistant from this square each of them possesses a half of the square. Prove that every rook possesses the equal area.

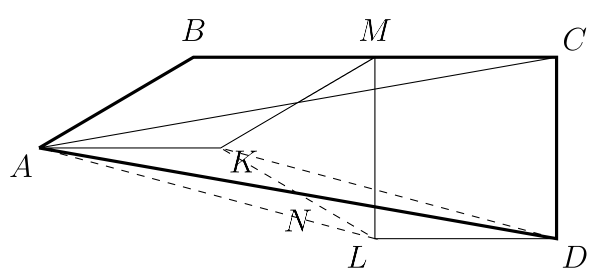
SOLUTION. Observe that a rook attacks 15 squares in total, 7 squares in a column and 7 squares in a row where it stands plus a square where it stands.

Let us denote a square and rook that stands on it by the same letter, correspondingly small and capital. Let rook A stand on square a. Consider a square c in the same row with square a. It is attacked by another rook B which stands on square b in the same column with c. Rook B will also attack a square d which is in the same column with a. The squares a, b, c, d are the corners of a rectangle. If it is a square then each rook A and B gets a half of c and d. Otherwise, one of the squares completely belongs to rook A, and another to rook B. Consequently, each rook possesses 8 squares in total: the square it stands on and a half of the remaining 14 squares. The statement holds for every rook.



5 [5] In a quadrilateral $ABCD$, angle B is equal to $150°$, angle C is right, and sides AB and CD are equal. Determine the angle between BC and the line connecting the midpoints of sides BC and AD.

Answer. 60 . Solution. Let M be the midpoint of BC and N be the midpoint of AD. Construct parallelogram $ABMK$ and rectangle $CDLM$. Observe that $AKDL$ is also a parallelogram. (Indeed, $AK = LD$ and AK is parallel to LD). Hence N is the midpoint of diagonal KL. In triangle KML, $\angle KML = \angle KMC - \angle LMC = 150° - 90° = 60°$. Since $KM = ML$, triangle KML is equilateral. Then the median MN of triangle KML is also a bisector and therefore $\angle KMN = 30°$ and $\angle BMN = 60°$.



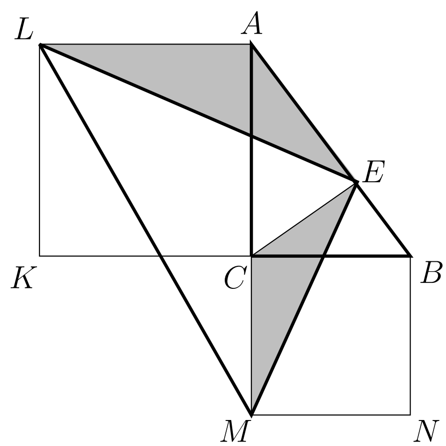
International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS SOLUTIONS

Senior O-Level Paper **Spring 2013.**

1 [**3**] There is a positive integer A. Two operations are allowed: increasing this number by 9 and deleting a digit equal to 1 from any position. Is it always possible to obtain $A+1$ by applying these operations several times?

SOLUTION. See Junior 1.

2 [**4**] Let C be a right angle in triangle ABC. On legs AC and BC the squares $ACKL$, $BCMN$ are constructed outside of triangle. If CE is an altitude of the triangle prove that LEM is a right angle.



SOLUTION 1. Since ABC is right triangle and CE is perpendicular to AB, triangles CBE and ACE are similar. Then we have

(a) $\angle CAB = \angle ECB$ (and therefore, $\angle LAE = \angle MCE$) and also

(b) $CM/CE = AL/AE$ (it follows from $CB/CE = AC/AE$).

Therefore, triangles ALE and CME are similar. Then $\angle ALE = \angle EMC$ and therefore quadrilateral $LAEM$ is cyclic. This implies $\angle LEM = \angle LAM = 90°$.

SOLUTION 2. It is easy to see that AEC and ACB are similar, hence $\frac{CE}{EA} = \frac{CB}{CA} = \frac{CM}{AL}$. Thus the rotation by 90° followed by homothety with center E and factor $\frac{CE}{CA}$ transforms segment EA into segment EC and line AL into line CM. Then segment AL transforms into CM while segment EL into segment EM. Hence $\angle LEM = 90°$.

3 [**4**] Eight rooks are placed on a 8×8 chessboard, so no two rooks attack one another. All squares of the board are divided between the rooks as follows. A square where a rook is placed belongs to it. If a square is attacked by two rooks then it belongs to the nearest rook; in case these two rooks are equidistant from this square then each of them possesses a half of the square. Prove that every rook possesses the equal area.

SOLUTION. See Junior 4.

4 [**4**] Each of 100 stones has a sticker showing its true weight. No two stones weight the same. Mischievous Greg wants to rearrange stickers so that the sum of the numbers on the stickers for any group containing from 1 to 99 stones is different from the true weight of this group. Is it always possible?

ANSWER: Yes.

SOLUTION. Let us arrange the stones in a circle in the increasing order of their weights clockwise. Let Greg move a sticker from each stone to the next one in the counterclockwise direction. In this way the heaviest stone will get a sticker with the smallest number while every other stone gets a sticker with the number greater than its true weight. Therefore for any group of stones which does not include the heaviest stone the sum of the numbers on the stickers will be greater than the total true weight of stones of this group. On the other hand, if a group contains the heaviest stone (but not all stones), then the complementary group (that is, all other stones) does not contain it; therefore in that group the sum of the numbers on the stickers will be greater than the true total weight of stones. Then in the chosen group the sum of the numbers on the stickers will be smaller than the true weight of stones of this group. Hence, Greg can fulfill his task.

5 [**5**] A quadratic trinomial with integer coefficients is called *admissible* if its leading coefficient is 1, its roots are integers and the absolute values of coefficients do not exceed 2013. Basil has summed up all admissible quadratic trinomials. Prove that the resulting trinomial has no real roots.

SOLUTION. Consider admissible trinomial $x^2 + Bx + C$ and note that the polynomial $x^2 - Bx + C$ is also admissible. Then the sum of all admissible polynomials is $Ax^2 + C$ with $A > 0$. We need to prove that $C > 0$.

For each pair (a, b) of integers such that $0 \leq a \leq b \leq 2013$, $ab \leq 2013$, consider all admissible trinomials with roots (a, b), $(-a, b)$, $(-a, b)$, $(-a, -b)$. Consider the following cases:

(1) $a = 0$; then the contribution to C is 0.

(2) $a = 1$, $b = 2013$. In this case, there are two admissible trinomials, $x^2 \pm 2012x - 2013$; their joint contribution to C equals -4026.

(3) $a = 1 < b < 2013$. Then there are four admissible trinomials, $x^2 \pm (b + 1)x + b$. $x^2 \pm (b - 1)x - b$; their joint contribution to C equals 0.

(4) $1 < a < b \leq 2013$. Then since $ab \leq 2013$ we have $a < b < 2013/2$ and therefore $a + b < 2013$. Thus again we have four trinomials; their joint contribution to C equals 0.

(5) $1 \leq a = b$, $a^2 < 2013$. We get three trinomials: $x^2 \pm 2a + a^2$, and $x^2 - a^2$; their joint contribution to C equals a^2. In total, $C = 1^2+2^2+\ldots+44^2-4026 = \frac{1}{6}\cdot 44\cdot 45\cdot 89-4026 > 0$.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS SOLUTIONS

Junior A-Level Paper **Spring 2013.**

1 [**4**] Several positive integers are written on a blackboard. The sum of any two of them is some power of two (for example, $2, 4, 8, \ldots$). What is the maximal possible number of different integers on the blackboard?

Answer: Two.

Solution 1. Let a be the greatest number written on a blackboard. There is an integer $n \geq 0$ such that $2^n \leq a < 2^{n+1}$. Then $2^n < a + b \leq 2a < 2^{n+2}$ where b is the other number on the board. Hence $a + b = 2^{n+1}$. Thus all the remaining integers are in the form $2^{n+1} - a$. Therefore the number of different integers on the board is no more than two.

Example of two integers: 1 and 3.

Solution 2. We prove that the number of integers does not exceed 2. Assume that $a < b < c$ on the board. Then $a + b < a + c < b + c$ are different powers of 2 and therefore $b + c \geq 2(a + c)$. Then $b \geq 2a + c$ which is impossible. Example of two integers: 1 and 3.

2 [**4**] Twenty children, ten boys and ten girls, are standing in a line. Each boy counted the number of children standing to the right of him. Each girl counted the number of children standing to the left of her. Prove that the sums of numbers counted by the boys and the girls are the same.

Solution 1. Assume that the children in a line stay to the right of the first person. Let a boy on the k-th position count the number $20 - k$ while a girl on the n-th position count the number $n - 1$. Therefore the total sums of numbers obtained by boys and girls are $200 - S_b$ and $S_g - 10$ respectively, where S_b is the sum of boys' positions and S_g is the sum of girls' positions. It remains to check that $200 - S_b = S_g - 10$. The latter follows from $S_b + S_g = 1 + 2 + \cdots + 20 = 210$.

Solution 2. Let B and G be the sums counted by boys and girls respectively. Note that if a boy and a girl interchange their places in the line, both sums will increase or decrease on the same amount. Therefore the difference between B and G is always the same. However, in situation when ten girls are followed by ten boys it is obvious that both sums are the same.

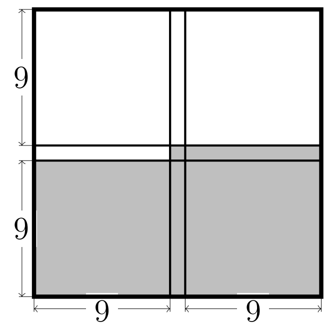
3 [**5**] There is a 19×19 board. Is it possible to mark some 1×1 squares so that each of 10×10 squares contain different number of marked squares?

Answer. Yes, it is possible. Solution. Observe that each of 100 of 10×10 squares in a 19×19 shares a common central cell (1×1 square). Assume that it is marked; otherwise, we can interchange marked and unmarked cells.

Let us mark every cell in each of nine bottom rows, the central cell and all cells in central row to the right of it. Consider a 10×10 square at the top left position. It has one marked cell. Let us move this square to the right, one column at time. In this way, each new 10×10 square will have one more marked cell than the previous one. Therefore we get squares with 1,2,. . . ,10 marked cells.

Now, move each of these ten squares down one row at time. It is easy to see that each new 10×10 square contains 10 more marked cells than the square one position above it. In this way, we get squares with 11, 21, 31,. . . ,91, 12, 22, 32,. . . ,92,. . . , 20, 30,. . . , 100 marked cells.

4 [**5**] On a circle, there are 1000 nonzero real numbers painted black and white in turn. Each black number is equal to the sum of two white numbers adjacent to it, and each white number is



equal to the product of two black numbers adjacent to it. What are the possible values of the total sum of 1000 numbers?

SOLUTION 1. Let w_n be the n-th white number, b_n be the n-th black number and S_w and S_b be the total sums of white and black numbers respectively (we assume that w_1 is left neighbour of b_1, $w_{n+500} = w_n$ and $b_{n+500} = b_n$). Then

$$b_n = w_n + w_{n+1} \qquad \text{and} \qquad w_n = b_{n-1}b_n. \tag{1}$$

Then (1) implies $b_n = b_{n-1}b_n + b_nb_{n+1}$ and since $b_n \neq 0$ we have $b_{n-1} + b_{n+1} = 1$. Then $S_b = b_1 + b_2 + \ldots + b_{500} = 250$ as we split $b_1, \ldots, b_{500}$ into 250 pairs (b_{n-1}, b_{n+1}).

On the other hand, $S_b = (w_1 + w_2) + (w_2 + w_3) + \ldots + (w_{499} + w_{500}) + (w_{500} + w_1) = 2S_w$, therefore $S_w = 250/2 = 125$. Finally, the total sum of all numbers is $S_w + S_b = 125 + 250 = 375$.

SOLUTION 2. Let a be a value of some black number. Assume that the value of neighbouring white number is ab. Then the following six numbers are uniquely determined: b, $b - ab$, $1 - a$, $(1 - a)(1 - b)$, $1 - b$, $a(1 - b)$. It is easy to check that the sum of these eight numbers is 3. Since the given 1000 numbers can be split into 125 consecutive groups, the total sum of all numbers is $3 \times 125 = 375$.

5 [**6**] A point in the plane is called a node if both its coordinates are integers. Consider a triangle with vertices at nodes containing exactly two nodes inside. Prove that the straight line connecting these nodes either passes through a vertex or is parallel to a side of the triangle.

SOLUTION 1

Lemma. Suppose that X and Y are interior points of triangle ABC and the segment XY is not parallel to any side of the triangle. Then there exists a segment equal and parallel to XY, with one endpoint at a vertex and the other endpoint inside the triangle.

Proof. Through each vertex of triangle ABC draw a line parallel to XY. Consider the line that is between two others. Assume it passes through vertex A. By D denote the point of intersection of this line with side BC. Since segment XY is parallel to AD and lies completely in the interior of the triangle, XY is shorter than AD. Mark a point Z on AD so that $AZ = XY$. By construction, point Z is an interior point of triangle ABC. □

Let us proceed with the problem. Let X and Y be two nodes inside triangle ABC. If line XY is parallel to any side of the triangle, the statement holds. Otherwise, in accordance with the lemma we construct point Z. Note that Z is a node. By condition Z coincides with either X or Y. Therefore X and Y belong to the line passing through a vertex of a triangle.

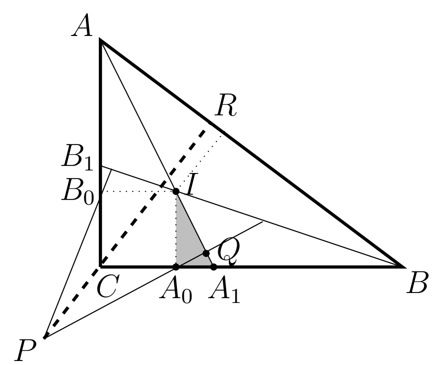
SOLUTION 2 (FOR ADVANCED PARTICIPANTS). Assume that line XY does not pass through any vertex of triangle ABC. Then there is a side (let it be BC) which XY does not cross. By Pick's formula the areas of triangles XBC and YBC are equal. Then altitudes of these triangles to side BC are equal and therefore, line XY is parallel to BC.

Remark. Consider triangle with vertices on lattice. Then the area of the triangle equals $A = i+b/2-1$ where i and b are the numbers of lattice points in the interior and on the boundary of the triangle respectively (Pick's formula).

6 [**8**] Let ABC be a right-angled triangle, I its incenter and B_0, A_0 points of tangency of the incircle with the legs AC and BC respectively.

Let the perpendicular dropped to AI from A_0 and the perpendicular dropped to BI from B_0 meet at point P. Prove that the lines CP and AB are perpendicular.

Solution.



Let Q be the foot of perpendicular dropped from A_0 to AI. Let us denote by A_1 intersection of AI and CB, B_1 intersection of BI and CA, and R intersection of PC and AB.

Let $\angle CAB = 2\alpha$ and $\angle ABC = 2\beta$ $(2\alpha+2\beta = 90^\circ)$. Then $\angle B_0IB_1 = \angle CBB_1 = \alpha$ and $\angle A_0IA_1 = \angle CAA_1 = \beta$. Then $\angle B_0PA_0 = \alpha + \beta = 45^\circ$. (Indeed, in triangle PB_0A_0, $\angle B_0A_0P = 45^\circ + \beta$, $\angle A_0B_0P = 45^\circ + \alpha$ and therefore, $\angle B_0PA_0 = 180^\circ - 45^\circ - \alpha - 45^\circ - \beta = 90^\circ - (\alpha + \beta) = 45^\circ$).

Consider the circle with centre C and radius B_0C $(B_0C = A_0C)$. Note that $\angle B_0PA_0 = 1/2\angle B_0CA_0$. Since $\angle B_0CA_0$ is a central angle, $\angle B_0PA_0$ must be inscribed in constructed circle. It follows that triangle PCA_0 is isosceles $(PC = CA_0)$ so that $\angle CPA_0 = \angle CA_0P = \beta$ and therefore $\angle RCB = 2\beta$. In triangle CRB we have: $\angle RCB = 2\beta$ and $\angle RBC = 2\alpha$. Then $\angle CRB = 2\alpha + 2\beta = 90^\circ$.

7 [**9**] Two teams A and B play a school ping pong tournament. The team A consists of m students, and the team B consists of n students where $m \neq n$.

There is only one ping pong table to play and the tournament is organized as follows. Two students from different teams start to play while other players form a line waiting for their turn to play. After each game the first player in the line replaces the member of the same team at the table and plays with the remaining player. The replaced player then goes to the end of the line. Prove that every two players from the opposite teams will eventually play against each other.

Solution. Let us separately numerate the players of each team according to their order in the original line: $a_1, a_2 \dots, a_m$ and $b_1, b_2 \dots, b_n$. The first game is played between a_1 and b_1. Observe that during the tournament the players of the same team (including a player at the table) preserve their cyclic order in a line. A player of one team can change his position relatively to a player of another team and it can be only at the table: a player can come to the table before and leave the table after a player of the opposite team.

Let us split the games into series consisting of $m + n - 2$ games each. During the first series, all first $m + n - 2$ players except a_m and b_n will play at the table. The latter two will play the first game in the second series. Similarly, a_{m-1} and b_{n-1} will be the ones who play the first game in the third series, and so on. We can see that each time, the index of each player in the first game of the series moves one position back in a cycle.

This implies that in m series every member of the team A will exit the table exactly $m-1$ times and in n series every member of the team B will exit the table exactly $n-1$ times. Therefore in mn series the members of teams A and B will exit the table exactly $n(m-1)$ and $m(n-1)$ times respectively.

Let $m > n$. Then $n(m-1) - m(n-1) = m - n \geq 1$. Consider arbitrary players a_i and b_j. After $2mn$ series a_i exits the table at least 2 times more than b_j. Therefore, there will be two consecutive exiting of a_i such that b_j remains in the line. Assuming that a_i and b_j do not meet at the table, a_i must overcome b_j in a line, which is not possible.

Remarks. 1. In fact, each pair of players of different teams meets already in the first mn series. Indeed, if m and n are relatively prime then according to the above the players meet at the beginning of a new series. Otherwise $|m - n| \geq 2$, and the proof works for mn cycles.

1^* Since a_i is exactly in the same place after m cycles and b_j is in the same place after n cycles, everything repeats after $\operatorname{lcm}(m, n)$ cycles.

2. For $n = m > 2$ the assertion fails. For example, if the players of both teams alternate, each of them plays only with his neighbours in a line.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS SOLUTIONS

Senior A-Level Paper **Spring 2013.**

1 [**3**] Several positive integers are written on a blackboard. The sum of any two of them is a positive integer power of two (for example, $2, 4, 8, \ldots$). What is the maximal possible number of different integers on the blackboard?

Answer. Two.

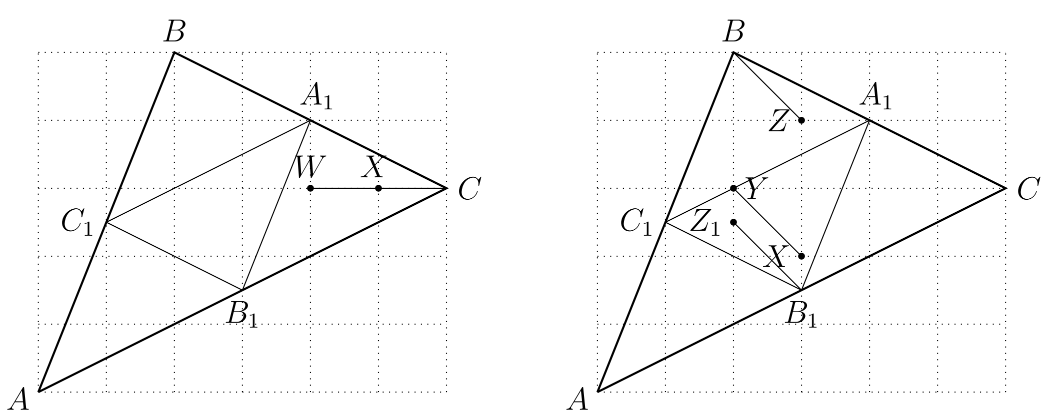
Solution. See Juniors 1.

2 [**4**] A boy and a girl were sitting on a long bench. Then twenty more children one after another came to sit on the bench, each taking a place between already sitting children. Let us call a girl brave if she sat down between two boys, and let us call a boy brave if he sat down between two girls. It happened, that in the end all girls and boys were sitting in the alternating order. Is it possible to uniquely determine the number of brave children?

Solution. Divide the bench into segments occupied by boys or girls only. These segments alternate. Notice that if a not brave child comes to the bench then the number of segments does not change. If a brave child comes to the bench then the number of segments increases by 2. Initially there were two segments. In the end there were 22 segments. Therefore, the number of brave children is $(22 - 2) : 2 = 10$.

3 [**6**] A point in the plane is called a node if both its coordinates are integers. Consider a triangle with vertices at nodes containing at least two nodes inside. Prove that there exists a pair of internal nodes such that a straight line connecting them either passes through a vertex or is parallel to side of the triangle.

Solution. Let A_1, B_1, and C_1 be midpoints of sides BC, CA, and AB of triangle ABC respectively.



(a) (b)

Consider two arbitrary nodes X and Y inside the triangle. Suppose one of them lies outside triangle $A_1B_1C_1$; assume that node X belongs to triangle A_1B_1C (see Figure (a)). Construct segment CW so that point X is the midpoint of CW. Note that point W is also a node, and that W belongs to the interior of triangle ABC. Hence there are two interior nodes, X and W such that line CW passes through a vertex (C).

Suppose that both nodes X and Y belong to triangle $A_1B_1C_1$ (see Figure (b)). If line XY is parallel to one of the sides of the given triangle then the statement holds. Otherwise, let us apply the lemma (see solution of Problem 5, Juniors) to the triangle $A_1B_1C_1$. According to the lemma there exists a segment (B_1Z_1) equal and parallel to segment XY, with one endpoint at a vertex (B_1) and the other endpoint (Z_1) inside triangle $A_1B_1C_1$. Consider segment BZ symmetrical to B_1Z_1 about the midpoint of A_1C_1. By construction segment BZ is also equal and parallel to the segment XY. Hence Z is a node which belongs to the interior of triangle A_1BC_1. Then, as is shown above, line BZ contains another node inside triangle ABC.

4 [**6**] Integers $1, 2, \ldots, 100$ are written on a circle, not necessarily in that order. Can it be that the absolute value of the difference between any two adjacent integers is at least 30 and at most 50?

Answer. No.

Solution. Suppose we can place the numbers on a circle so that the condition holds. Let us call the integers from 26 to 75 *medial*, and all the others *extreme*. Two extreme integers cannot be consecutive (their difference is either less than 25 or greater than 50). Note that the numbers of the extreme and medial integers are the same and therefore they must alternate. However the medial number 26 can be adjacent to only one extreme integer 76. Contradiction.

5 [**7**] On an initially colourless plane three points are chosen and marked in red, blue and yellow. At each step two points marked in different colours are chosen. Then one more point is painted in the third colour so that these three points form a regular triangle with the vertices coloured clockwise in "red, blue, yellow". A point already marked may be marked again so that it may have several colours. Prove that for any number of moves all the points containing the same colour lie on the same line.

Solution. In what follows, *simple rotation* would mean "rotation by 60° clockwise". Denote the given points by R, B, and Y. Construct a point R' corresponding to B and Y, and a point B' corresponding to Y and R. Then the simple rotation about Y transforms segment $R'R$ into BB'. (If at least one of these segments degenerates into a point then the triangle RBY is regular and its vertices are listed clockwise; in this case no new points arise.)

Thus line RR' is transformed into a line BB' by a simple rotation about their common point O. Let us call the first line *red*, the second line *blue*, and the line obtained by simple rotation of blue line about O *yellow*. Observe that a simple rotation about any point R_1 on the red line transforms blue line into yellow line because the distances from R_1 to these lines are equal. Consequently, if we construct a point Y_1 corresponding to two arbitrary points B_1 and R_1 on blue and red lines respectively, it gets on yellow line. Similarly, given two points on lines of different colours, a point constructed according to the rule will be on the line of the third colour.

6 There are five distinct real positive numbers. It is known that the total sum of their squares and the total sum of their pairwise products are equal.

(a) [**4**] Prove that we can choose three numbers such that it would not be possible to make a triangle with sides' lengths equal to these numbers.

(b) [**5**] Prove that the number of such triples is at least six (triples which consist of the same numbers in different order are considered the same).

Solution. Let us place the numbers in increasing order: $a < b < c < d < e$.

(a) Suppose the assertion fails, then $a + b > e$. Hence

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 < ab + bc + cd + de + (a + b)e.$$

Contradiction.

(b) Let us consider the following cases:

(1) $b+c \leq d$.
Then each of six triples in which two numbers are from the set $\{a, b, c\}$ and the third number is from the set $\{d, e\}$ does not form a triangle.

(2) $c+d \leq e$. Then each of six triples which includes e does not form a triangle.

(3) $b+d \leq e$ and $a+b \leq d$. Then each of six triples $\{a, b, d\}$, $\{a, b, e\}$, $\{a, c, e\}$, $\{a, d, e\}$, $\{b, c, e\}$, $\{b, d, e\}$ does not form a triangle.

Suppose that neither of above cases takes place, that is, $b+c > d$, $c+d > e$ and at least one of inequalities $b+d > e$ and $a+b > d$ holds. We shall show that this is impossible. Indeed,

(4) If $b+c > d$, $b+d > e$ then

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 < ab+bc+ce+(b+c)d+(b+d)e.$$

Contradiction.

(5) If $c+d > e$, $a+b > d$ then

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 < ab+bc+cd+(a+b)d+(c+d)e.$$

Contradiction.

Remark. More than six "bad triples" cannot be guaranteed. Indeed, consider the numbers a, b, c, d close to 1, and find e as a root of a quadratic equation (since the constant term is close to 2, it has a positive root). Then each triple from the set $\{a, b, c, d\}$ is "good".

7 The King decided to reduce his Council consisting of thousand wizards. He placed them in a line and placed hats with numbers from 1 to 1001 on their heads not necessarily in this order (one hat was hidden). Each wizard can see the numbers on the hats of all those before him but not on himself or on anyone who stayed behind him. By King's command, starting from the end of the line each wizard calls one integer from 1 to 1001 so that every wizard in the line can hear it. No number can be repeated twice.

In the end each wizard who fails to call the number on his hat is removed from the Council. The wizards knew the conditions of testing and could work out their strategy prior to it.

(a) [5] Can the wizards work out a strategy which guarantees that more than 500 of them remain in the Council?

(b) [7] Can the wizards work out a strategy which guarantees that at least 999 of them remain in the Council?

Answer. Yes, they can (in both cases).

Solution

(a) Let the 1000-th wizard calculate the sum of the numbers he sees and call the remainder of that sum when it is divided by 1001 (if the remainder is 0, he calls 1001). Then 999-th wizard can compute his number by subtracting the sum of the numbers he sees from what he has heard. In this way the wizards proceed until someone computes the number that coincides with the number called by the 1000th wizard. According to the preliminary agreement, this *looser* calls the number of the first wizard in line. It signals to the others that one who called the number of the first wizard has indeed calculated the number called by the 1000-th wizard; therefore, they proceed accordingly. As the result, all the wizards but the last one, the looser, and the first wizard will deliver correct answers.

(b) The 1000-th wizard does not know two numbers, his and on the hidden hat. There are two ways to order these two numbers. In one case the permutation of all 1001 numbers is even, in the other case it is odd. According to the preliminary agreement the 1000-th wizard calls the number that makes the permutation even (with 50% probability to be wrong). Now 999-th wizard also does not know only two numbers, his own number and the number on the hidden hat. He arranges these numbers so that the resulting permutation is even and calls the corresponding number. His answer is indeed correct since the permutation he made in his mind coincides with the permutation defined by the last wizard, which correctly reflects the number of the 999-th wizard. In a similar way, all the others wizards calculate their numbers. Consequently all wizards but probably the last one will deliver correct answers.

Here we used

Definition

(1) *Permutation* of order n is $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ where $a_1, \ldots, a_n$ are numbers from 1 to n in some order (each number is included exactly once).

(2) *Inversion* is every occurrence when $a_k < a_l$ while $k > l$;

(3) *Parity* of the permutation is a parity of the total number of inversions. One can observe that if two numbers in the permutation exchange their places the parity of permutation changes (from odd to even and from even to odd).