31. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Bazna varijanta, 18. oktobar 2009. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Može li se kvadrat razrezati na 9 kvadrata i obojiti tako da se dobije 1 beli, 3 siva i 5 crnih kvadrata, pri čemu bi istobojni kvadrati bili jednaki, a raznobojni kvadrati – nejednaki?.

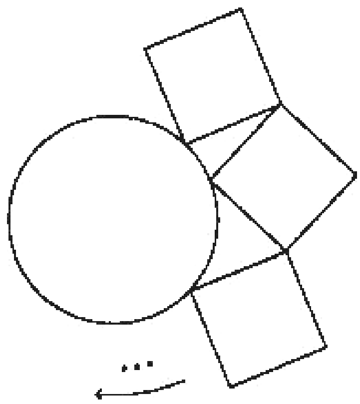
2. (4 poena) Imamo 40 tegova mase 1 g, 2 g, ..., 40 g. Od njih je izabrano 10 tegova s parnom masom i stavljeni su na levi tas terazija. Zatim je izabrano 10 tegova s neparnom masom i stavljeni su na desni tas terazija. Terazije su bile u ravnoteži. Dokažite da se na nekom tasu nalaze dva tega čije se mase razlikuju za 20 g.

3. (4 poena) Na stolu se nalazi kartonski krug poluprečnika 5 cm. Petar, sve dok može, prislanja uz krug spolja kartonske kvadrate stranice 5 cm, tako da budu ispunjeni ovi uslovi:

1) kod svakog kvadrata jedno teme leži na kružnici-granici kruga;

2) kvadrati se ne prekrivaju;

3) svaki sledeći kvadrat dodiruje prethodni u temenu.



Odredite koliko kvadrata može postaviti Petar i dokažite da će prvi i poslednji kvadrat takođe da imaju zajedničko teme.

4. (5 poena) Sedmocifrenu šifru (kod), nazvaćemo dobrim ako se sastoji od sedam različitih cifara. Sef je zaključan (zaštićen) dobrom šifrom. Poznato je da će se sef otvoriti ako se unese dobra šifra koja se bar na jednoj poziciji poklapa sa šifrom sefa (reč je o poklapanju cifara na istoj poziciji). Može li se garantovano sef otvoriti za manje od 7 pokušaja?

5. (5 poena) Na jednom novom sajtu registrovalo se 2000 ljudi. Svaki je pozvao 1000 ljudi među onima koji su registrivani na tom sajtu da mu budu prijatelji. Dva čoveka postaju prijatelji tada i samo tada kada pozovu jedan drugog. Koliki je najmanje broj parova prijatelja na tom sajtu?

31. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Bazna varijanta, 18. oktobar 2009. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) Sedmocifrenu šifru (kod), nazvaćemo dobrim ako se sastoji od sedam različitih cifara. Sef je zaključan (zaštićen) dobrom šifrom. Poznato je da će se sef otvoriti ako se unese dobra šifra koja se bar na jednoj poziciji poklapa sa šifrom sefa (reč je o poklapanju cifara na istoj poziciji). Može li se garantovano sef otvoriti za manje od 7 pokušaja?

2. (4 poena) U prostoru se nalazi zatvorena izlomljena linija od šest delova *ABCDEF* čiji su suprotni delovi paralelni ($AB||DE$, $BC||EF$ i $CD||FA$). Pri tome *AB* nije jednako *DE*. Dokažite da svi delovi izlomljene linije leže u istoj ravni.

3. (4 poena) Postoje li prirodni brojevi *a,b, c,d* takvi da važi jednakost

$$a^3+b^3+c^3+d^3=100^{100}?$$

4. (4 poena) Na svakoj stranici pravilnog 2009-ougla uočena je i označena po jedna tačka. Te tačke su temena 2009-ugla površine *S*. Svaka od tih uočenih tačaka preslikana je simetrično u odnosu na središte stranice na kojoj se ta tačka nalazi. Dokažite da 2009-ugao s temenima u dobijenim (preslikanim) tačkama takođe ima površinu *S*.

5. (5 poena) U nekoj saveznoj državi nalaze se dva glavna grada (severni i juž-ni) i nekoliko drugih gradova od kojih su neki povezani autoputevima. Među tim putevima ima i onih na kojima se plaća putarina. Poznato je da na ma kojem putu iz južne prestonice u severnu ima ne manje od 10 puteva (deonica) gde se plaća putarina. Dokažite da se svi putevi (deonice puta), za koje se plaća putarina, mogu podeliti između deset kompanija, tako da na ma kojem putu iz južne u severnu prestonicu ima puteva (deonica) svake od tih kompanija.

31. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Sožena varijanta, 25. oktobar 2009. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) U 10 jednakih bokala razliveno je mleko – ne obavezno na ravne delove, ali je svaki bokal bio ispunjen ne više od 10%. U jednom koraku možemo odabrati jedan bokal i odliti iz njega bilo koju, ali jednaku količinu mleka u ostale bokale. Dokažite da se za ne više od 10 takvih operacija može postići da u svim bokalima bude ista količina mleka.

2. (6 poena) Miša ima 1000 jednakih kockica, pri čemu je kod svake jedan par suprotnih strana bele boje, drugi par – plave boje, a treći par – crvene boje. On je od njih sastavio veliku kocku 10×10×10, prislanjajući jednu do druge strane iste boje. Dokažite da ta velika kocka ima istobojnu stranu.

3. (6 poena) Odredite sve prirodne brojeve a i b, takve da $(a+b^2)(b+a^2)$ predstavlja broj koji je stepen broja 2.

4. (6 poena) Na stranicama BC i CD romba $ABCD$ uzete su tačke P i Q (tim redom) tako da je $BP=CQ$. Dokažite da se presečna tačka težišnih duži trougla APQ nalazi na dijagonali BD romba.

5. (9 poena = 2 poena +7 poena) Između tegova mase 1 g, 2 g, 3 g, ..., N g treba izabrati nekoliko tegova (više od jednog) sa sumarnom masom koja je jednaka prosečnoj masi preostalih tegova. Dokažite:

a) to se može učiniti ako je N+1 kvadrat celog broja (2 poena);

b) ako se to može učiniti, onda je N+1 kvadrat celog broja (7 poena).

6. (10 poena) Na ravan sa kvadratnom mrežom stavljano je 2009 jednakih kvadrata čije stranice leže na linijama mreže. Zatim su označena sva polja (kvadratići) koja su pokrivena neparnim brojem kvadrata. Dokažite da tako označenih polja nema manje od broja polja u jednom kvadratu.

7. (14 poena) Olga i Maksim platili su za putovanje po arhipelagu od 2009 ostrva, pri čemu su neka ostrva povezana dvosmernim brodskim maršrutama. Putovanje su organizovali kao igru. Na početku Olga bira ostrvo na koje će prvo da doputuju. Zatim zajedno putuju brodovima, naizmenično birajući ostrvo, na kojem još nisu bili. Počinje da bira Maksim. Gubi onaj ko ne može da izabere ostrvo (jer nema broda koji ide sa ostrva na kojem se nalaze na neko neposećeno ostrvo). Dokažite da pri ma kojoj šemi maršruta Olga može da pobedi, ma kako igrao Maksim.

31. TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo.

Složena varijanta, 25. oktobar 2009. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) Sto pirata igrali su karte uz plaćanje u zlatu (zlatnim peskom), a zatim je svaki izbrojao koliko je puta ukupno dobio ili izgubio. Svaki pirat koji izgubi ima dovoljno zlata da plati. Tokom jedne operacije (igre) pirat može bilo da svima iz svojih zaliha dâ (isplati) jednaku količinu zlata (kad izgubi), bilo da njemu (kada igru dobije) svaki od ostalih pirata plati jednu te istu istu količinu zlata. Dokažite da se za nekoliko takvih operacija može postići da svaki pirat dobije (sumarno) svoj dobitak ili da isplati gubitak (To znači: ako je neko u igri dobio neku količinu zlata, onda on posle toga (posle podele) ima za toliko zlata više nego što je imao do podele; a ako je u igri izgubio neku količinu zlata, onda on posle toga ima za toliko manje zlata nego što je imao do tada. Razume se da je ukupan broj dobitaka jednak ukupnom broju gubitaka).

2. (6 poena) Od N pravougaonih pločica (ne moraju biti jednake) sastavljen je pravougaonik s nejednakim stranicama. Dokažite da se svaka pločica može raseći na dva dela tako da se od N delova može sastaviti kvadrat, a od preostalih N delova– pravougaonik.

3. (7 poena) Sfera dodirije sve ivice tetraedra. Spojimo dodirne tačke koje su na parovima nesusednih ivica. Dokazati da se tri tako dobijene duži seku u jednoj tački.

4. (9 poena) Označimo sa $[n]!$ proizvod $1\cdot 11\cdot 111\cdot\ldots\cdot 1\ldots 11$ (n jedinica) – svega n faktora. Dokažite da je broj $[n+m]!$ deljiv proizvodom $[n]!\cdot[m]!$.

5. (9 poena) Dati su trougao XYZ i konveksan šestougao $ABCDEF$. Stranice AB, CD i EF su paralelne i redom jednake stranicama XY, YZ i ZX. Dokažite da površina trougla s temenima u središtima stranica BC, DE i FA nije manja od površine trougla XYZ.

6. (12 poena) Olga i Maksim platili su za putovanje po arhipelagu od 2009 ostrva, pri čemu su neka ostrva povezana dvosmernim brodskim maršrutama. Putovanje su organizovali kao igru. Na početku Olga bira ostrvo na koje će prvo da doputuju. Zatim zajedno putuju brodovima, naizmenično birajući ostrvo, na kojem još nisu bili. Počinje da bira Maksim. Gubi onaj ko ne može da izabere ostrvo (jer nema broda koji ide sa ostrva na kojem se nalaze na neko neposećeno ostrvo). Dokažite da pri ma kojoj šemi maršruta Olga može da pobedi, ma kako igrao Maksim.

7. (14 poena) Na ulazu u pećinu postavljen je uspravno bubanj (cilindar), na kome je po obodu (kružno) na jednakim razmacima raspoređeno N po izgledu spolja jednakih burića. U svakom burencetu nalazi se haringa – bilo s glavom nagore, bilo s glavom nadole, ali gde i kako – ne vidi se. U jednom koraku Ali-Baba bira nekoliko burića (od 1 do N komada) i prevrće ih. Posle toga bubanj počinje da se okreće, a kada se zaustavi, Ali-Baba ne može da odredi koji burići su bili prevrnuti. Pećina se otvara ako za vreme okretanja bubnja svih N haringi budu okrenute glavom na istu stranu. Za koje vrednosti N Ali-Baba može za izvestan broj koraka otvoriti pećinu?

31. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Bazna varijanta, 28. februar 2010. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) U šest korpi nalaze se kruške, šljive i jabuke. Broj šljiva u svakoj korpi jednak je broju jabuka u ostalim korpama uzetih zajedno, a broj jabuka u svakoj korpi jednak je broju krušaka u ostalim korpama uzetih zajedno. Dokažite da je ukupan broj voćki deljiv sa 31.

2. (3 poena) Miloš i Kosta seku kvadratnu tortu. Kosta bira na torti tačku (ali ne na rubu/granici). Posle toga Miloš čini pravolinijski rez od izabrane tačke do kraja (u bilo kom pravcu). Zatim Kosta čini drugi pravolinijski rez od izabrane tačke do kraja, ali normalan na prvi rez, a onda manji od dobijenih delova daje Milošu. Miloš želi da dobije bar četvrtinu torte. Može li ga Kosta u tome sprečiti?

3. Nacrtan je ugao i na raspolaganju je samo šestar.

a) (2 poena) Koliko najmanje kružnica treba nacrtati da bi se sa sigur-nošću utvrdilo da li je dati ugao oštar?

b) (2 poena) Kako utvrditi da li je veličina datog ugala 31^0? Dopušteno je opisivati koliko-god bilo kružnica.

4. (5 poena) Na jednoj olimpijadi svaki učesnik poznaje bar tri druga učesnika. Dokažite da se može izabrati grupa sa parnim brojem učesnika (više od 2 čoveka) i rasporediti ih oko okruglog stola tako da svaki poznaje oba svoja suseda.

5. (5 poena) Na tabli je napisan 101 broj: 1 na kvadrat, 2 na kvadrat, ... , 101 na kvadrat. U jednoj operaciji (koraku) dopušteno je izbrisati ma koja dva broja i umesto njih zapisati moduo (apsolutnu vrednost) njihove razlike. Koji najmanji broj se može dobiti posle 100 takvih operacija?

31. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Bazna varijanta, 28. februar 2010. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Iz Južne Amerike u Rusiju prevoze banane, limune i ananase 2010 brodova. Broj banana na svakom brodu jednak je broju limuna na svim ostalim brodovima uzetim zajedno, a broj limuna na svakom broju jednak je broju ananasa na ostalim brodovima uzetim zajedno. Dokažite da je ukupan broj južnog voća na brodovima deljiv sa 31.

2. (4 poena) O funkciji $f(x)$ poznato je sledeće: ma koja prava u koordinatnoj ravni ima sa grafikom $y=f(x)$ onoliko zajedničkih tačaka koliko ih ima sa parabolom $y=x^2$. Dokažite da je funkcija $f(x)$ identički jednaka x^2.

3. (5 poena) Može li se površ pravilnog oktaedra oblepiti sa nekoliko pravilnih šestouglova bez preklapanja i praznina (razmaka)? /Pravilan oktaedar ima 6 temena, sve strane su mu jednakostranični trouglovi, a u svakom temenu sustiču se 4 strane/

4. (5 poena) Baron Minhauzen je zamolio da neko zamisli polinom (različit od konstante) $P(x)$ s celim nenegativnim koeficijentima i da mu saopšti samo vrednosti $P(2)$ i $P(P(2))$. Baron tvrdi da on samo na osnovu tih podataka uvek može rekonstruisati (pogoditi) zamišljeni polinom. Da li baron greši?

5. (6 poena) U ravni se nalazi igla. Dopušteno je iglu okretati za 45^0 oko bilo kojeg njenog kraja. Može li se, učinivši nekoliko takvih okretanja igle, postići to da se igla vrati na početno mesto, ali tako da su njeni krajevi zamenili mesta? /Smatrajte da je igla duž?/

31. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Složena varijanta, 14. mart 2010. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najvi{e poena, a poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Imamo komad (parče) sira. Dopušteno je izabrati ma koji pozitivan (može i neceo) broj *a*, različit od 1, pa razrezati (podeliti) to parče u odnosu 1 : *a* po težini, zatim razrezati u tom istom odnosu ma koji od nastalih komada, itd. Može li se to (u)raditi tako da posle konačnog broja razrezivanja ceo sir bude podeljen na dve gomile iste težine?

2. (4 poena) U trouglu ABC tačka M je središte stranice AC, a tačka P leži na stranici BC. Duž APseče BM u tački O. Pokazalo se da je $BO=BP$. Nađite odnos OM:PC

3. Na kružnici je raspoređeno 999 brojeva, svaki je jednak 1 ili −1, pri čemu nisu svi brojevi jednaki. Uzmimo sve proizvode po 10 uzastopnih brojeva (tj.. koji su jedan za drugim) i saberimo ih.

a) (3 poena) Koliki najmanji zbir se tako može dobiti?

b) (3 poena) A koji najveći?

4. (6 poena) Zbir cifara prirodnog broja *n* jednak je 100. Može li zbir cifara kuba broja *n* da bude jednak 1000000?

5. a) (3 poena) Tri viteza jašu na konjima po kružnom putu u smeru suprotnom kretanju satne kazaljke. Mogu li oni da jašu neograničeno dugo s različitim stalnim brzinama, ako na putu postoji samo jedna tačka (mesto) gde jahači imaju mogućnost da prestignu jedan drugog?

b) A ako ima 10 vitezova?

6. (8 poena) U ravni je data otvorena izlomljena linija koja samu sebe nigde ne seče, a sastoji se od 31 dela (duži) (susedni delovi ne pripadaju jednoj pravoj). Preko svakog dela izlomljene linije povučena je prava koja sadrži taj deo. Dobijena je 31 prava, pri čemu je moguće da su se neke prave poklopile. Koliki je najmanji broj različitih pravih koje se tako mogu dobiti?

7. (11 poena) Na nekim poljima table 10×10 nalazi se po jedna buva. Svakog minuta buve skaču, svaka na susedno polje (u odnosu na stranicu). Buve skaču samo u jednom od četiri pravca, paralelna ivicama table, ostajući na istom pravcu, dok je to moguće, a u protivnom slučaju menjaju smer u suprotni. Pera je posmatrao buve u toku jednog sata i nijednom nije video da se dve buve nalaze na istom polju. Koliki je najveći broj buva mogao da skače po tabli?

31. TURNIR GRADOVA

Prolćno kolo.
Složena varijanta, 14. mart 2010. god.
10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Mogu li se sve prave u ravni razdvojiti na parove uzajamno normalnih pravih tako da svaka prava pripada tačno jednom paru normalnih pravih?

2. a) (2 poena) Imamo parče sira. Dopušteno je izabrati ma koji iracionalan broj $a>0$ i razrezati (podeliti) to parče u odnosu $1 : a$ po težini, zatim razrezati u tom istom odnosu ma koji od nastalih komada, itd. Može li se to (u)raditi tako da posle konačnog broja razrezivanja ceo sir bude podeljen na dve gomile iste težine?
b) (2 poena) Isto pitanje, ako se bira pozitivan racionalan broj $a\neq 1$.

3. (6 poena) Može li se, primenjujući na broj 1 funkcije sin, cos, tg, ctg, arcsin, arccos, arctg, arcctg, u nekom redosledu, dobiti broj 2010? (Svaka funkcija se može koristiti koliko-god hoćete puta).

4. (6 poena) Na kongresu se skupilo 5000 ljubitelja filma, pri čemu je svaki video bar jedan film. Podeljeni su u sekcije dva tipa: ili rasprava o filmu koji su videli svi članovi sekcije; ili svaki priča o filmu koji je on video, a nije ga više video niko u sekciji. Dokazati da se svi mogu podeliti tačno na 100 sekcija.(Dopuštena je i sekcija od jednog čoveka: on piše mišljenje o filmu koji je video).

5. (7 poena) Trideset tri viteza jašu na konjima po kružnom putu u smeru suprotnom kretanju satne kazaljke. Mogu li oni da jašu neograničeno dugo s različitim stalnim brzinama, ako na putu postoji samo jedna tačka (mesto) gde jahači imaju mogućnost da prestignu jedan drugog?

6. (8 poena) Četvorougao $ABCD$ je opisan oko kružnice s centrom I . Tačke M i N su središta stranica AB i CD. Zna se da je $IM/AB=IN/CD$. Dokažite da je $ABCD$ trapez ili paralelogram.

7. (9 poena) Dat je prirodan broj. Dopušteno je izmeću cifara broja na proizvoljan način postaviti pluseve i izračunati nastali zbir (na primer, od broja 123456789 može se dobiti zbir 12345+6+789=13140). S dobijenim brojem ponovo se može vršiti slična operacija, i tako dalje. Dokazati da se, polazeći od ma kojeg broja, može dobiti jedno-cifrerni broj, obavivši ne više od 10 operacija.

ТРИДЦАТЬ ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 8 мая 2010 г.

---

1. Про пирамиду $SA_1A_2...A_n$ известно, что ее основание $A_1A_2...A_n$ — правильный n-угольник, а все боковые грани — равнобедренные треугольники (равные стороны не обязательно с вершиной S). Обязательно ли эта пирамида правильная, если
а) $n = 5$?
б) $n > 5$?

Г.Гальперин

2. В кинотеатре два зала с одинаковым числом мест. В каждом зале несколько рядов (места в любом ряду нумеруются подряд, начиная с единицы). Группа школьников побывала на утреннем сеансе в первом зале, а на дневном сеансе — во втором, оба раза заняв все места. Известно, что в первом зале есть ряд из 10 мест, а во втором — нет. Докажите, что найдутся два школьника, которые на одном из сеансов сидели в одном ряду, а на другом — имели одинаковый номер места.

А.Буфетов

3. На плоскости дана окружность ω_1 радиуса 1. На одной из ее хорд, как на диаметре, построена окружность ω_2. На одной из хорд ω_2, как на диаметре, построена окружность ω_3, и т.д. Найдите наибольшее возможное расстояние между двумя точками, одна из которых принадлежит ω_1, а другая принадлежит $\omega_{1000000}$.

М.Мурашкин

4. Ладья прошлась по шахматной доске 8×8, не проходя дважды через одну и ту же клетку. При этом все повороты направо делались в черных клетках, а налево — в белых. Какое наибольшее число клеток могло быть пройдено?

А.Шаповалов

5. Саша и Люда играют в игру. Саша должен построить описанный 13-угольник с одной заданной стороной, а Люда хочет ему помешать. Сначала Саша называет номер стороны — число k от 1 до 13. Затем Люда задает длину этой стороны — действительное положительное число s. Саша выиграет, если опишет теперь вокруг единичного круга 13-угольник, где длина k-й по величине стороны равна s. Может ли Люда ему помешать? (Сторона k-я по величине, если найдутся $k - 1$ сторон не короче нее, и при этом остальные $13 - k$ сторон не длиннее нее).

А.Шаповалов

6. Обозначим через $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ произведение всевозможных попарных разностей $a_i - a_j$, где $1 \leq i < j \leq n$. Докажите, что для любых натуральных $a_1, a_2, \ldots, a_n$ число $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ делится на $[1, 2, \ldots, n]$.

М.Берштейн

ТРИДЦАТЬ ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 25 октября 2009 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
4	1.	В 10 одинаковых кувшинов было разлито молоко — не обязательно поровну, но каждый оказался заполнен не более, чем на 10%. За одну операцию можно выбрать кувшин и отлить из него любую часть поровну в остальные кувшины. Докажите, что не более чем за 10 таких операций можно добиться, чтобы во всех кувшинах молока стало поровну. *Е.Н.Горинов*
6	2.	У Миши есть 1000 одинаковых кубиков, у каждого из которых одна пара противоположных граней белая, вторая — синяя, третья — красная. Он собрал из них большой куб $10\times10\times10$, прикладывая кубики друг к другу одноцветными гранями. Докажите, что у большого куба есть одноцветная грань. *М.В.Мурашкин*
6	3.	Найдите все такие натуральные числа a и b, что $(a+b^2)(b+a^2)$ является целой степенью двойки. *В.В.Произволов*
6	4.	На сторонах BC и CD ромба $ABCD$ взяли точки P и Q соответственно так, что $BP = CQ$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника APQ лежит на диагонали BD ромба. *В.В.Произволов*
	5.	Из гирек весами 1 г, 2 г, …, N г требуется выбрать несколько (больше одной) с суммарным весом, равным среднему весу оставшихся гирек. Докажите, что
2	а)	это можно сделать, если $N + 1$ — квадрат целого числа;
7	б)	если это можно сделать, то $N + 1$ — квадрат целого числа. *А.В.Шаповалов*
10	6.	На клетчатую плоскость положили 2009 одинаковых квадратов, стороны которых идут по сторонам клеток. Затем отметили все клетки, которые покрыты нечетным числом квадратов. Докажите, что отмеченных клеток не меньше, чем клеток в одном квадрате. *И.Пак, Ю.Рабинович*
14	7.	Оля и Максим оплатили путешествие по архипелагу из 2009 островов, где некоторые острова связаны двусторонними маршрутами катера. Они путешествуют, играя. Сначала Оля выбирает остров, на который они прилетают. Затем они путешествуют вместе на катерах, по очереди выбирая остров, на котором еще не были (первый раз выбирает Максим). Кто не сможет выбрать остров, проиграл. Докажите, что при любой схеме маршрутов Оля может выиграть, как бы ни играл Максим. *Фольклор, предложил А.В.Шаповалов*

ТРИДЦАТЬ ПЕРВЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 25 октября 2009 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

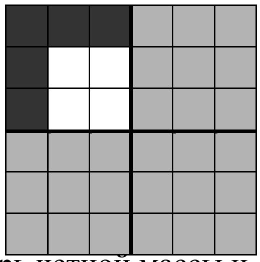
баллы	задачи
4	1. 100 пиратов сыграли в карты на золотой песок, а потом каждый посчитал, сколько он в сумме выиграл либо проиграл. У каждого проигравшего хватает золота, чтобы расплатиться. За одну операцию пират может либо раздать всем поровну золота, либо получить с каждого поровну золота. Докажите, что можно за несколько таких операций добиться того, чтобы каждый получил (в сумме) свой выигрыш либо выплатил проигрыш. (Разумеется, общая сумма выигрышей равна сумме проигрышей). *Е.Н.Горинов*
6	2. Из N прямоугольных плиток (возможно, неодинаковых) составлен прямоугольник с неравными сторонами. Докажите, что можно разрезать каждую плитку на две части так, чтобы из N частей можно было сложить квадрат, а из оставшихся N частей — прямоугольник. *А.В.Шаповалов*
7	3. Сфера касается всех ребер тетраэдра. Соединим точки касания на парах несмежных ребер. Докажите, что три полученные прямые пересекаются в одной точке. *В.В.Произволов*
9	4. Обозначим через $[n]!$ произведение $1 \cdot 11 \cdot 111 \cdot \ldots \cdot \underbrace{11...11}_{n \text{ единиц}}$ — всего n сомножителей. Докажите, что число $[n+m]!$ делится на произведение $[n]! \cdot [m]!$. *М.А.Берштейн*
9	5. Даны треугольник XYZ и выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Стороны AB, CD и EF параллельны и равны соответственно сторонам XY, YZ и ZX. Докажите, что площадь треугольника с вершинами в серединах сторон BC, DE и FA не меньше площади треугольника XYZ. *Н.Белухов*
12	6. Оля и Максим оплатили путешествие по архипелагу из 2009 островов, где некоторые острова связаны двусторонними маршрутами катера. Они путешествуют, играя. Сначала Оля выбирает остров, на который они прилетают. Затем они путешествуют вместе на катерах, по очереди выбирая остров, на котором еще не были (первый раз выбирает Максим). Кто не сможет выбрать остров, проиграл. Докажите, что при любой схеме маршрутов Оля может выиграть, как бы ни играл Максим. *Фольклор, предложил А.В.Шаповалов*
14	7. У входа в пещеру стоит барабан, на нем по кругу через равные промежутки расположены N одинаковых с виду бочонков. Внутри каждого бочонка лежит селедка — либо головой вверх, либо головой вниз, но где как — не видно (бочонки закрыты). За один ход Али-Баба выбирает любой набор бочонков (от 1 до N штук) и переворачивает их все. После этого барабан приходит во вращение, а когда останавливается, Али-Баба не может определить, какие бочонки перевернуты. Пещера откроется, если во время вращения барабана все N селедок будут расположены головами в одну сторону. При каких N Али-Баба сможет за сколько-то ходов открыть пещеру? *Л.Брагинский, Д.Фомин, П.Коган*

31 турнир городов, осень (18 октября 2009 г.)

Решения задач
(А.Шаповалов и Л.Медников)

Базовый вариант, младшие

1. [3] Можно ли квадрат разрезать на 9 квадратов и раскрасить их так, чтобы получились 1 белый, 3 серых и 5 черных квадратов, причем одноцветные квадраты были бы равны, а разноцветные квадраты – не равны?
Решение. Можно. Разрежем квадрат 6×6 на 4 квадрата 3×3. Три из них окрасим в серый цвет, а от четвертого отрежем угловой (белый) квадрат 2×2. Оставшийся уголок состоит из 5 единичных квадратов (см. рис).



2. [4] Есть 40 гирек массой 1 г, 2 г, ..., 40 г. Из них выбрали 10 гирь четной массы и положили на левую чашу весов. Затем выбрали 10 гирь нечетной массы и положили на правую чашу весов. Весы оказались в равновесии. Докажите, что на какой-нибудь чаше есть две гири с разностью масс в 20 г.
Решение. Разобьем гирьки на пары с разностью 20 г: (1, 21), (2, 22), ..., (20, 40). Если на весах окажутся обе гирьки какой-то пары, все доказано. Иначе на весах оказалось ровно по одной гирьке из каждой пары. Тогда (независимо от выбора гирек в каждой паре) вес нечетной чашки при делении на 20 даст тот же остаток, что и сумма 1 + 3 + ... + 19 = 100 (то есть 0), а вес четной чашки даст тот же остаток, что и сумма 2 + 4 + ... + 20 = 110 (то есть 10). Противоречие: по условию эти веса равны.

3. [4] На столе лежит картонный круг радиуса 5 см. Петя, пока возможно, прикладывает к кругу снаружи картонные квадраты со стороной 5 см так, чтобы выполнялись условия:
1) у каждого квадрата одна вершина лежит на границе круга;
2) квадраты не перекрываются;
3) каждый следующий квадрат касается предыдущего вершиной к вершине.
Определите, сколько квадратов может выложить Петя, и докажите, что последний и первый квадрат тоже коснутся вершинами.
Ответ. 8 квадратов.
Решение. Если вершина A квадрата $ABCD$ лежит на окружности с центром O, то точки B, D и O лежат на окружности радиусом 5 см и центром A. Вписанный угол BOD = 45° – как половина центрального угла BAD. Итак, по условию каждый выложены квадрат виден из центра под углом 45°, и границы соседних углов совпадают, поэтому всего Петя сможет выложить 360°/45° = 8 квадратов. Пусть $EDFG$ – еще один выложенный квадрат (E лежит на окружности). $OADE$ – ромб, поэтому $\angle OAD = \angle OED$. Отсюда
$\angle OAB = 360° – 90° – \angle OAD = 360° – 90° – \angle OED = \angle OEG$. Треугольники OAB и OEG равны по двум сторонам и углу между ними, значит, $OB = OG$. Итак, вершины квадратов, противоположные общей, равноудалены от O. Таким образом, одна вершина первого квадрата и одна вершина восьмого лежат на одном и том же луче из O на одинаковом расстоянии от O. Значит, они совпадают.

4. Семизначный код, состоящий из семи различных цифр, назовем хорошим. Паролем сейфа является хороший код. Известно, что сейф откроется, если введен хороший код и на каком-нибудь месте цифра кода совпала с соответствующей цифрой пароля. Можно ли гарантированно открыть сейф быстрее чем за 7 попыток?
Решение. Можно за 6 попыток: 1234560, 2345610, 3456120, 4561230, 5612340, 6123450. Среди первых 6 цифр пароля есть цифра от 1 до 6. Поскольку мы каждую цифру от 1 до 6 по разу набрали на каждом из первых 6 мест, она хоть раз да совпадет.

5. [5] На новом сайте зарегистрировалось 2000 человек. Каждый пригласил к себе в друзья по 1000 человек. Два человека объявляются друзьями тогда и только тогда, когда каждый из них пригласил другого в друзья. Какое наименьшее количество пар друзей могло образоваться?
Ответ. 1000.
Решение. Всего было отправлено 2000000 приглашений, а пар на сайте $2000\cdot1999/2 = 1999000$. Приглашений на 1000 больше, чем пар, поэтому внутри хотя бы 1000 пар было отправлено два приглашения. Значит, образовалось хотя бы 1000 пар друзей. Ровно 1000 возможна: расставим всех людей на сайте по кругу, и пусть каждый пригласит 1000 следующих за ним по часовой стрелке. Тогда друзьями окажутся только то, кто расположен строго напротив друг друга.

Базовый вариант, старшие

1. [4] Семизначный код, состоящий из семи различных цифр, назовем хорошим. Паролем сейфа является хороший код. Известно, что сейф откроется, если введен хороший код и на каком-нибудь месте цифра кода совпала с соответствующей цифрой пароля. Можно ли гарантированно открыть сейф быстрее чем за 7 попыток?
См. задачу 5 для 8-9 классов.

2. [4] В пространстве расположена замкнутая шестизвенная ломаная $ABCDEF$, противоположные звенья которой параллельны ($AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ и $CD \parallel FA$). При этом AB не равно DE. Докажите, что все звенья ломаной лежат в одной плоскости.
Решение 1. Плоскости AEF и BCD параллельны: в них есть по паре параллельных прямых. Если бы они не совпадали, то высекали бы на параллельных прямых AB и DE равные отрезки $AB = DE$. Значит, все 6 точек лежат в плоскости AEF.
Решение 2. Вектор $\overline{AD}$ двумя способами *разными* способами выражается через векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$: $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{ED} + \overline{FE} + \overline{AF} = a\overline{AB} + b\overline{BC} + c\overline{CD}$, где $a \neq 1$. Поэтому векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$ компланарны.

3. [4] Существуют ли такие натуральные числа a, b, c, d, что $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 100^{100}$?
Решение. Существуют, например
$(100^{33})^3 + (2\cdot100^{33})^3 + (3\cdot100^{33})^3 + (4\cdot100^{33})^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3)\cdot100^{99} = 100\cdot100^{99} = 100^{100}$.

4. [4] На сторонах правильного 2009-угольника отметили по точке. Эти точки являются вершинами 2009-угольника площади S. Каждую из отмеченных точек отразили относительно середины стороны, на которой эта точка лежит. Докажите, что 2009-угольник с вершинами в отраженных точках также имеет площадь S.
Решение. Пусть $A_1A_2\ldots A_{2009}$ – правильный 2009-угольник со стороной 1, φ – его угол, P – его периметр, M – 2009-угольник площади S, a_i расстояние от A_i до ближайшей по часовой стрелке отмеченной вершины ($i = 1, 2, \ldots, 2009$). Сторона многоугольника M отсекает от угла A_i правильного многоугольника треугольник площади $0{,}5 \sin\varphi\cdot(1 - a_{i-1})a_i$. Суммируя отсеченные площади, получаем $0{,}5 \sin\angle A\cdot((a_1 + a_2 + \ldots + a_{2009}) - (a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{2009}a_1)$.

После отражения сторона нового 2009-угольника отсекает от угла A_i треугольник площади $0{,}5 \sin \varphi \cdot a_{i-1}(1 - a_i)$. Суммируя отсеченные площади, снова получаем тот же результат.

5. [5] В стране две столицы и несколько городов, некоторые из них соединены дорогами. Среди дорог есть платные. Известно, что на любом пути из южной столицы в северную имеется не меньше десяти платных дорог. Докажите, что все платные дороги можно раздать десяти компаниям так, чтобы на любом пути из южной столицы в северную имелись дороги каждой из компаний.

Решение 1. Отметим на каждом пути из южной столицы Ю в северную С самую первую платную дорогу числом 1. Докажем, что на каждом пути p осталось не менее 9 неотмеченных платных дорог.

Выберем на p ближайшую к С отмеченную дорогу d. Поскольку она отмечена, она была первой платной на некотором пути q. Пройдем от Ю до d по (бесплатным дорогам) пути q, а далее через d вдоль p до С. По условию на таком пути не менее 10 платных дорог, и только дорога d отмечена. Значит, на участке пути от d до С есть не менее 9 неотмеченных платных дорог.

Объявим временно отмеченные дороги бесплатными и отметим на каждом пути первую платную дорогу числом 2. Теперь на каждом пути останется не менее 8 платных дорог.

Повторяя рассуждение, расставим отметки 3, ..., 10 на каждом пути.
Теперь раздадим дороги компаниям в соответствии с их «номерами». Оставшиеся платные дороги раздадим произвольно.

Решение 2. Пусть проезд по каждой платной дороге стоит 1 тугрик. Назовем *весом* дороги, наименьшую сумму, которую надо заплатить, чтобы выехав из Ю, проехать по этой дороге.

Докажем, что вес самой северной дороги каждого пути не меньше 10. Предположим, противное – что вес последней дороги на пути p не превосходит 9. Тогда до нее можно дойти, заплатив не более 8 тугриков. Продолжив путь по остатку пути p мы получим (в противоречие с условием) пример пути, на котором менее 10 платных дорог.

Заметим, что первая платная дорога на каждом пути имеет вес 1. При переходе к следующей дороге вес не меняется или увеличивается на 1. Поэтому на каждом пути есть дороги любого веса от единицы до 10. Отдадим k-й компании все дороги веса k, а дороги веса больше 10 распределим произвольно.

31 турнир городов, осень (25 октября 2009 г.)

Решения задач
(А.Шаповалов и Л.Медников)

Сложный вариант, младшие

1. В 10 одинаковых кувшинов было разлито молоко – не поровну, но каждый оказался заполнен не более, чем на 10%. За одну операцию можно выбрать кувшин и отлить из него поровну во все остальные. Докажите, что не более чем за 10 таких операций можно добиться, чтобы во всех кувшинах молока стало поровну.

Решение. Отольем из каждого кувшина во все остальные $^1/_{10}$ от *первоначального* количества молока в данном кувшине. Тогда молоко из каждого кувшина распределится поровну, значит, и в каждом кувшине станет поровну.

2. У Миши есть 1000 одинаковых кубиков, у каждого из которых одна пара противоположных граней белая, вторая – синяя, третья – красная. Он собрал из них большой куб $10\times10\times10$, прикладывая кубики друг к другу одноцветными гранями. Докажите, что у большого куба есть одноцветная грань.

Решение. Пусть левая грань кубика – разноцветная. Тогда найдутся два соседних разноцветных квадратика. Повернем кубик так, чтобы соответствующие кубики были один над другим. Они образуют $2\times1\times1$-параллелепипед П с разноцветной (скажем, сине-белой) левой гранью. Тогда общая горизонтальная грань кубиков красная, а все вертикальные 2×1-грани П – сине-белые. Рассмотрим $2\times1\times1$-параллелепипед П’, примыкающий к П по 2×1-грани. У него есть сине-белая грань, значит, и все его 2×1-грани – сине-белые. Так продолжая, видим, что в двойном горизонтальном слое $2\times10\times10$, содержащем П, у всех вертикальных $2\times1\times1$ параллелепипедов есть сине-белая грань, и, значит, общая грань красная. Итак, в двойном слое одинарные слои $1\times10\times10$ соприкасаются по красной грани 10×10, значит, и верхняя грань куба – тоже красная.

3. Найдите все такие натуральные a и b, что $(a^2 + b)(b^2 + a)$ является целой степенью двойки.

Ответ. $a = b = 1$

Решение 1. Каждая скобка является степенью двойки. Поэтому числа a и b одной четности. Разберем два случая.

1) $a = b$. Тогда $a^2 + a = a(a + 1)$ – степень двойки. Числа a и $a + 1$ – степени двойки разной четности, следовательно, $a = 1$.

2) $a > b$. Тогда $a^2 + b = 2^m > b^2 + a = 2^n$. Имеем

$(2^{m-n} - 1)\cdot2^n = a^2 - b^2 + b - a = (a - b)(a + b - 1)$. $a - b$ четно, а $a + b - 1$ нечетно, следовательно, $a - b = 2^n = a + b^2$. Противоречие.

Решение 2. Каждая скобка является степенью двойки. Пусть $a = 2^km$, $b = 2^ln$, где m и n – нечетны. Можно считать, что $k \ge l$. Тогда $a^2 + b = 2^{2k}m^2 + 2^ln = 2^l(2^{2k-l}m^2 + n)$. Последняя скобка четна только при $2k - l = 0$, то есть при $k = l = 0$. Итак, a и b – нечетны. Тогда $a + 1= 2^km$, $b + 1 = 2^ln$, где m и n – нечетны, $k \ge 1$, $l \ge 1$. Снова можно считать, что $k \ge l$. Нетрудно убедиться, что
$a^2 + b = 2^{2k}m^2 - 2^{k+1}m + 2^ln = 2^l(2^{2k-l}m^2 - 2^{k-l+1}m + n)$. Выражение $2^{2k-l}m^2 - 2^{k-l+1}m + n$ нечетно, значит, равно 1. Но первый член по модулю не меньше второго, поэтому такое равенство возможно только при $k = m = n = 1$. Но тогда и $l = 1$, то есть $a = b = 1$.

4. На сторонах BC и CD ромба $ABCD$ взяли точки P и Q соответственно так, что $BP = CQ$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника APQ лежит на диагонали BD ромба.

Набросок решения. Достаточно доказать, что середина отрезка PQ лежит на прямой, параллельной BD и расположенной в 1,5 раза дальше от A, чем BD. Но это – прямая, проходящая через точки K и L – середины сторон BC и CD соответственно. Ясно, что $KP = LQ$. Отсюда легко вывести, что точки P и Q равноудалены от прямой KL, а значит, середина отрезка PQ лежит на KL.

5. Из гирек весами 1 г, 2 г, ..., N г требуется выбрать несколько (больше одной) с суммарным весом, равным среднему весу оставшихся гирек. Докажите, что

а) это можно сделать, если $N+1$ – квадрат целого числа;

б) если это можно сделать, то $N+1$ – квадрат целого числа;

Решение. **а**) Пусть $N + 1 = k^2$. Выберем гирьки веса 1, 2,..., k, их сумма равна $\frac{k^2+k}{2}$. Среднее арифметическое оставшихся последовательных чисел равно полусумме крайних, то есть $\frac{k+1+k^2-1}{2} = \frac{k^2+k}{2}$.

б) Общий вес всех N гирек равен $\frac{N^2+N}{2}$. Пусть мы выбрали k гирек общим весом S так, что средний вес оставшихся $N - k$ гирек равен S. Значит, $\frac{N^2+N}{2} - S = (N-k)S$, что равносильно равенству $2S(N - k + 1) = N^2 + N$. Отсюда следует, что
$2S > N + k$, поскольку $N^2 + N > N^2 + N - k^2 + k = (N + k)(N - k + 1)$.

С другой стороны, если мы выбираем k *наименьших* гирь, то средний вес оставшихся будет *наибольшим* и равным $\frac{N+k+1}{2}$, то есть (при любом выборе гирь) $2S \le N + k + 1$.

Итак, единственный возможный вариант – выбрать k *наименьших* гирь, удвоенный общий вес $k^2 + k$ которых должен *равняться* $N + k + 1$. Отсюда, $N + 1 = k^2$.

6. [5] На клетчатую плоскость положили 2009 одинаковых квадратов, стороны которых идут по сторонам клеток. Затем отметили все клетки, которые покрыты нечетным числом квадратов. Докажите, что отмеченных клеток не меньше, чем в одном квадрате.

Решение. Назовем 2009 квадратов плитками. Разобьем плоскость на решетку из квадратов размером с плитку линиями, идущими по границам клеток. У каждой клетки теперь есть координаты: номер столбца (считая от левого края квадрата) и номер строки, (считая от нижнего края). Заметим, что все клетки, накрытые плиткой, имеют разные координаты. Выберем любую пару координат, и в каждой накрытой клетке с этими координатами напишем число покрывающих ее плиток. Сумма этих чисел равна числу плиток, то есть 2009. Хотя бы одно слагаемое нечетно. Это верно для каждой пары координат, а число пар равно числу клеток в плитке.

7. Оля и Максим оплатили путешествие по архипелагу 2009 островов, где некоторые острова связаны двусторонними маршрутами катера. Они путешествуют, играя. Сначала Оля выбирает остров, на который они прилетают. Затем они вместе путешествуют на катерах, по очереди выбирая следующий остров (первый раз выбирает Максим). Кто не сможет выбрать новый остров, проиграл. Докажите, что при любой схеме маршрутов Оля может выиграть, как бы не играл Максим.

Решение. Отметим на схеме *максимально возможное* число маршрутов без общих концов. Соответственно, острова разобьются на пары и несколько (но не менее одного) отдельных островов. Прилетим на какой-нибудь отдельный остров. Далее, если Максим ходит на остров отмеченного маршрута, Оля отвечает ходом на второй остров этого маршрута. Предположим, однако, что Максиму удастся сделать ход на отдельный остров. Путь с начала до этого острова состоит из четного числа $2k$ островов, или из $k-1$ отмеченного маршрута и двух отдельных островов. Но ведь этот путь можно разбить на k маршрутов, и они, вместе с непосещенными отмеченными маршрутами дадут *большее* число маршрутов, что противоречит максимальности. Значит, ход Максима на отдельный остров невозможен, и Оля выигрывает.

Сложный вариант, старшие

1. 100 пиратов сыграли в карты на золотой песок, а потом каждый посчитал, сколько он в сумме выиграл либо проиграл. У каждого проигравшего хватает золота, чтобы расплатиться. За одну операцию пират может либо раздать всем поровну золота, либо получить с каждого поровну золота. Докажите, что можно за несколько таких операций добиться того, чтобы каждый получил (в сумме) свой выигрыш либо выплатил проигрыш. (Разумеется, общая сумма выигрышей равна сумме проигрышей.)

Решение. Обозначим через Z сумму выигрышей (она же сумма проигрышей). Пусть сначала у каждого пирата весь его песок лежит в *правом* кармане. Попросим каждого проигравшего выдать всем (включая себя самого) по 0,01 от своего проигрыша. Полученный при этом песок каждый кладет в свой *левый* карман. В результате у каждого пирата в *левом* кармане окажется на $0{,}01Z$ золотого песка, а *правый* карман каждого проигравшего "облегчится" на его проигрыш. Далее каждому выигравшему все пираты (включая его самого) выдают из своих *левых* карманов по 0,01 его выигрыша. В результате все *левые* карманы снова опустеют, а к песку в *правом* кармане каждого выигравшего добавится его выигрыш.

2. Из N прямоугольных плиток (возможно, неодинаковых) составлен прямоугольник с неравными сторонами. Докажите, что можно разрезать каждую плитку на две части так, чтобы из N частей можно было сложить квадрат, а из оставшихся N частей – прямоугольник.

Решение. Пусть размеры прямоугольника $a{\times}b$, $a < b$ и сторона b горизонтальна. Сожмем прямоугольник равномерно по горизонтали так, чтобы стороны стали равны. Получим разбитый на прямоугольники квадрат. Каждая его часть получена сжатием плитки по горизонтали в $^b/_a$ раз. Значит, она имеет меньшую ширину, но ту же высоту, и такую часть можно отрезать от плитки вертикальным разрезом. Оставшая часть плитки получается из нее сжатием по горизонтали в $^b/_{(b-a)}$ раз. Соответственно, из них можно сложить прямоугольник, получающийся из исходного сжатием в $^b/_{(b-a)}$ раз.

3. Сфера касается всех ребер тетраэдра. Соединим точки касания на парах несмежных ребер. Докажите, что три полученные прямые пересекаются в одной точке.

Решение 1. Поместим в каждую вершину массу, обратно пропорциональную длинам проведенных из этой вершины касательных к сферы (все три касательные для данной вершины, очевидно, равны). Тогда точка касания ребра совпадает с центром масс этого ребра, и все три отрезка из условия задачи пересекаются в центре масс тетраэдра.

Решение 2. Пусть K, L, M, N, P, R – точки, в которых соответственно ребра AB, AC, AD, BC, BD, CD тетраэдра $ABCD$ касаются сферы, a, b, c, d – длины касательных, выходящих соответственно из вершин A, B, C, D.

Плоскости ABD и BCD пересекаются по прямой BD. По теореме Менелая (примененной к треугольнику ABD) прямая MK пересекает BD в точке, делящей отрезок BD (внешним образом) в отношении $\frac{AM}{DM}\cdot\frac{BK}{AK} = \frac{a}{d}\cdot\frac{b}{a} = \frac{b}{d}$. По той же причине прямая

RN пересекает BD в той же точке ($\frac{CR}{DR}\cdot\frac{BN}{CN} = \frac{c}{d}\cdot\frac{b}{c} = \frac{b}{d}$). (Если $b = d$, то MK и RN параллельны BD.) Значит, прямые MK и RN лежат в одной плоскости (пересекаются или параллельны). Следовательно, прямые MN и KR также пересекаются.

Аналогично прямая LP пересекает MN и KR. Поскольку эти три прямые очевидно не лежат в одной плоскости, они должны пересекаться в одной точке.

4. Обозначим через $[n]!$ произведение $1\cdot 11\cdot 111\cdot\ldots\cdot \underbrace{11\ldots 11}_{n\text{ единиц}}$ (всего n сомножителей).

Докажите, что число $[n+m]!$ делится на произведение $[n]![m]!$.

Решение 1. Обозначим число из k единиц 1_k, тогда $[m]! = 1_m[m-1]!$, $1_{m+n} = 10^m 1_n + 1_m$.

Обозначим $C[m, n] = \frac{[n+m]!}{[m]![n]!}$. Положим $[0]! = 1$, тогда $C[0, n]$ и $C[m, 0]$ определены и равны 1.

Докажем индукцией по $m + n$, что число $C[m, n]$ – целое. База и случай $m = 0$ или $n = 0$ очевидны.

Пусть $m, n \geq 1$ и для меньших значений $m + n$ все доказано. Тогда число

$$C[m, n]= \frac{1_{m+n}[n+m-1]!}{[m]![n]!} = \frac{\left(1_n 10^m + 1_m\right)[n+m-1]!}{[m]![n]!} = 10^m\frac{1_n[n+m-1]!}{[m]!1_n[n-1]!} + \frac{1_m[n+m-1]!}{1_m[m-1]![n]!} =$$

$= 10^m C[m, n-1] + C[m-1, n]$ – тоже целое.

Решение 2. Пусть q – число, взаимно простое с 10, $k(q)$ – наименьшее k, при котором кратно q. Легко видеть, что m при делении на k дает в остатке $r \Leftrightarrow 1_m$ при делении на 1_k дает в остатке 1_r. Отсюда 1_k кратно $q \Leftrightarrow k$ кратно $k(q)$. Поэтому из множителей вида 1_k, входящих в $[n]!$, на q делятся ровно $\left[\frac{n}{k(q)}\right]$.

Из этого следует, что простое число $p \neq 2, 5$ входит в разложение $[n]!$ на простые множители в степени

$$\left[\frac{n}{k(p)}\right] + \left[\frac{n}{k(p^2)}\right] + \left[\frac{n}{k(p^3)}\right] + \ldots$$

В силу неравенства $\left[\frac{n}{k}\right] + \left[\frac{m}{k}\right] \leq \left[\frac{n+m}{k}\right]$ каждое простое число входит в разложение $[n+m]!$ не в меньшей степени, чем в разложение $[n]![m]!$.

Решение 3 (для знатоков). Рассмотрим многочлены $P_k(x) = x^{k-1} + x^{k-2} \ldots + x + 1$, $Q_n(x) = P_2(x)\ldots P_n(x)$ (над полем комплексных чисел).

Корнями многочлена $P_k(x)$ являются все (кроме единицы) корни k-й степени из единицы. Пусть ε – *первообразный* корень k-й степени из 1. Тогда он является корнем l-й степени тогда и только тогда, когда l кратно k. Поэтому множитель $x - \varepsilon$ входит в разложение $Q_{m+n}(x)$ на линейные множители в степени $\left[\frac{n+m}{k}\right]$, а в $Q_n(x)Q_m(x)$ – в степени $\left[\frac{n+m}{k}\right] + \left[\frac{n+m}{k}\right] \leq \left[\frac{n+m}{k}\right]$.

Следовательно, $Q_{m+n}(x)$ делится на $Q_n(x)Q_m(x)$.

Поскольку $Q_n(x)Q_m(x)$ – приведенный многочлен, частное – многочлен с целыми коэффициентами. Подставив $x = 10$, получаем утверждение задачи.

5. Даны треугольник XYZ и выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Стороны AB, CD и EF параллельны и равны соответственно сторонам XY, YZ и ZX. Докажите, что площадь треугольника с вершинами в серединах сторон BC, DE и FA не меньше площади треугольника XYZ.

Решение 1. Пусть $S_{XYZ} = s$, $S_{ABCDEF} = S$, K, L и M – середины соответственно сторон BC, DE и FA.

1) Напомним, что если R – середина отрезка PQ, не пересекающего прямую HG, то

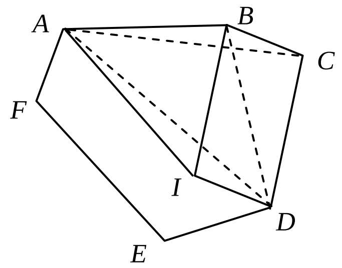
$$S_{RHG} = {}^1/_2\,(S_{PHG} + S_{QHG})$$

(высота треугольника RHG, опущенная на HG равна полусумме соответствующих высот треугольников PHG и QHG).

Поэтому $S_{KLM} = {}^1/_2\,(S_{BLM} + S_{CLM}) = {}^1/_4\,(S_{BDM} + S_{BEM} + S_{CDM} + S_{CEM}) =$

$$= {}^1/_8\,(S_{BDA} + S_{BDF} + S_{BEA} + S_{BEF} + S_{CDA} + S_{CDF} + S_{CEA} + S_{CEF}).$$

2) Построим параллелограмм $BCDI$ (см. рис.). По условию треугольники ABI и XYZ равны. Заметим, что



$$S_{DAB} = S_{CAB} + S_{IAB} = S_{CAB} + s$$

(высота треугольника ADB, опущенная на AB равна сумме соответствующих высот треугольников ACB и AIB).

Аналогично $S_{EAB} = S_{FAB} + s$,

$$S_{ACD} = S_{BCD} + s,\ \ S_{FCD} = S_{ECD} + s,$$

$$S_{BFE} = S_{AFE} + s,\ \ S_{CFE} = S_{AFE} + s,$$

3) Отсюда

$$S_{KLM} = {}^1/_8\,(S_{BDA} + S_{BDF} + S_{BEA} + S_{BEF} + S_{CDA} + S_{CDF} + S_{CEA} + S_{CEF}) =$$

$$= {}^1/_8\,(6s + S_{ABC} + S_{BDF} + S_{ABF} + S_{AEF} + S_{BCD} + S_{CDE} + S_{ACE} + S_{DEF}).$$

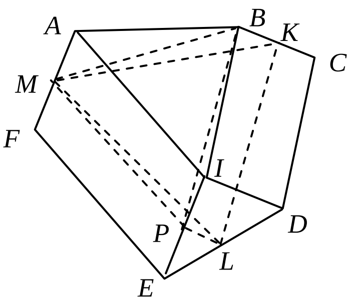
Заметим, что

$$S_{BDF} + S_{ABF} + S_{BCD} + S_{DEF} = S_{AEF} + S_{CDE} + S_{ACE} + S_{ABC} = S$$

Поэтому $S_{KLM} = {}^1/_8\,(6s + 2S) = {}^1/_4\,(3s + S) > s$.

(Точка I очевидно находится внутри шестиугольника, поэтому $s < S$).

Решение 2. Построим параллелограмм $BCDI$ (см. рис.). По условию треугольники ABI и XYZ равны. Значит, отрезок AI параллелен и равен FE, то есть $AIEF$ – тоже параллелограмм. Пусть Р – середина EI.



Тогда $S_{KLM} > S_{MPB} > S_{ABI} = S_{XYZ}$.

Оба неравенства следуют из следующего очевидного утверждения:

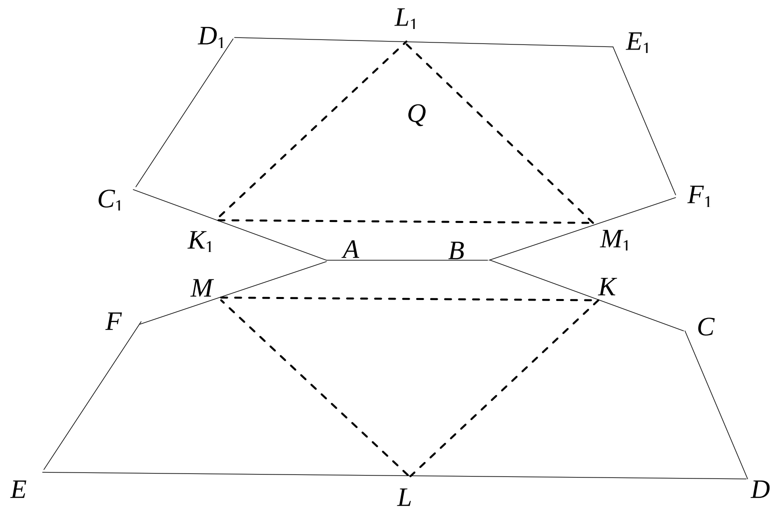
Пусть $TUVW$ – параллелограмм, точка R и отрезок VW лежат по разные стороны от прямой TU. Тогда

$$S_{RVW} > S_{RTU}.$$

(В первом случае используется параллелограмм $BKLP$, во втором – $AIPM$.)

Замечание. В этой задаче есть досадный второй случай, который не учитывают оба приводимых ранее решения: когда шестиугольник и треугольник, данные в условии, ориентированы по-разному (то есть шестиугольник при чтении букв – названий вершин – обходится по часовой стрелке, а треугольник – против). В этом случае если достраивать на одной из сторон шестиугольника наш треугольник, он будет торчать наружу!

Вот набросок решения для этого случая. Он сводится к 1-му следующей перестройкой шестиугольника:



Здесь $\overline{AC_1} = \overline{CB}$, $\overline{C_1D_1} = \overline{EF}$, $\overline{BF_1} = \overline{FA}$, $\overline{F_1E_1} = \overline{DC}$. Отсюда легко следует, что $\overline{K_1L_1} = \overline{LK}$, $\overline{K_1M_1} = \overline{MK}$, $\overline{L_1M_1} = \overline{ML}$, т.е. серединный треугольник не изменился.

6. См задачу 7 для младших.

7. У входа в пещеру стоит барабан, на нем по кругу через равные промежутки расположены N одинаковых с виду бочонков. Внутри каждого бочонка лежит селедка – либо головой вверх, либо головой вниз, но где как – не видно (бочонки закрыты). За один ход Али-Баба выбирает любой набор бочонков (от 1 до N штук) и переворачивает их все. После этого барабан приходит во вращение, а когда останавливается, Али-Баба не может определить, какие бочонки были перевернуты. Пещера откроется, если во время вращения барабана все N селедок будут расположены головами в одну сторону. При каких N Али-Баба сможет за сколько-то ходов открыть пещеру?

Ответ. При $N = 2^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Решение. Заменим бочонки на нули и единицы, стоящие по кругу.

Пусть $N \neq 2^k$, $k = 0, 1, 2,$ Покажем, что при невезении Али-Баба никогда не откроет пещеру. Можно считать, что мы играем против Али-Бабы, вращая круг, и что он заранее говорит нам, на каких местах он будет менять цифры на каждом (в том числе и на первом) ходу.

Рассмотрим сначала случай, когда N нечетно. Расставим на круге нули и единицы так, чтобы Али-Баба не выиграл первым своим (известным нам) ходом (то есть чтобы после его хода на круге были как нули, так и единицы).

Пусть Али-Баба на очередном ходу выбрал для замены определенные k мест. Он выиграет только если эти k мест совпадут либо со множеством всех нулей, либо со множеством всех единиц. Но число нулей не равно числу единиц (сумма чисел нечетна!). Значит, каких-то цифр – не k штук. Загнав поворотом такую цифру на одно из выбранных k мест, мы не дадим Али-Бабе выиграть следующим ходом.

Случай, когда N четно, но имеет нечетный делитель m, сводится к разобранному. Отметим на большом круге m равноотстоящих мест и забудем про остальные.

Действуя, как описано выше, мы сможем помешать Али-Бабе уравнять все цифры на отмеченных местах.

Алгоритм выигрыша Али-Бабы для 2^k мест будем строить индуктивно. База для $k = 1$ очевидна. Пусть у нас есть алгоритм A_m для m мест. Построим A_{2m}. Начнем с частных случаев. Разобьем круг на m пар противоположных мест и установим соответствие между парами для $2m$ и местами для m.

1) Пусть мы знаем, что в каждой паре цифры равны. Применим алгоритм A_m, заменяя места целыми парами. Ясно, что когда замок открылся там, он откроется и тут.

2) Пусть мы знаем, что четность суммы в каждой паре одинакова. Применим A_m для пар. Если не открылось, то все суммы были нечетны. Но меняя оба числа пары, мы не меняем четности. Значит, все суммы остались нечетными. Изменим m цифр подряд (назовем эту операцию D). Теперь все суммы четны. Еще раз применив A_m для пар, откроем замок. Назовем алгоритм для этого случая B.

3) Применим теперь A_m для пар другим способом: цель – сделать суммы в парах одной четности. По прежнему на каждом шагу мы выбираем набор пар согласно A_m, но меняем в каждой выбранной паре только *по одной* цифре. Назовем алгоритм C. Он гарантирует, что на каком-то шаге (мы не знаем, на каком) четности сумм совпадут. Дверь это, понятно, не откроет. Но мы схитрим: после каждого шага C применим B, а затем D. При совпадении сумм четностей B откроет дверь, а иначе BD не изменит четностей сумм.

ТРИДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
11 класс, очный тур, 8 мая 2010 г.

Задача 1.

а) Ответ: не обязательно. Пусть $SA_1 = SA_3 = A_1A_2$. Тогда все боковые грани — равнобедренные треугольники. Точку S можно выбрать так, чтобы пирамида была неправильная.

б) Ответ: пирамида обязана быть правильной. Заметим, что в каждой треугольной грани либо расстояния от S до других двух вершин одинаковые, либо одно из этих двух расстояний равно стороне правильного n-угольника, лежащего в основании пирамиды. Если есть две соседние треугольные грани, в которых вершина S лежит напротив основания равнобедренного треугольника, то пирамида правильная. Если таких граней одна или нет, то вершина S удалена на сторону n-угольника как минимум от трех вершин, и снова пирамида правильная.

Задача 2. Предположим противное — таких школьников нет.

Пусть в одном из залов больше рядов, чем в другом. Тогда школьники, сидящие на первых местах этого зала, не смогут рассесться в разные ряды второго зала — противоречие. Значит, общее число рядов в каждом зале одинаково.

Пусть в одном из залов (скажем, в первом) длина самого короткого ряда больше, чем в другом, и равна m. Тогда школьники с местами 1, 2, …, m из первого зала не смогут рассесться в разные ряды второго зала. В самом деле, школьники с первыми местами из первого зала садятся в разные ряды второго зала, и поскольку всего рядов поровну, одно место каждого кратчайшего ряда второго зала будет кем-то из них занято; школьники со вторыми местами аналогично займут еще по одному месту каждого кратчайшего ряда второго зала, и так далее, то есть мест в кратчайшем ряду второго зала не может оказаться меньше m.

Если же длины кратчайших рядов равны, то аналогично равны и количества кратчайших рядов.

Рассуждая далее точно так же, получим, что одинаковы длины следующих по величине рядов и их количества, и так далее (строгое доказательство можно оформить по индукции). В результате получим, что набор длин рядов и их количеств в обоих залах одинаков, что противоречит условию.

Задача 3.

Ответ: 1001.

Первое решение. Докажем по индукции, что наибольшее возможное расстояние между центром ω_1 и точкой, принадлежащей ω_N, равно $\sqrt{N}$. База для $N = 1$ очевидна. Покажем, что из верности нашего утверждения для N следует его верность для $N+1$. Для начала найдем наибольшее возможное расстояние между центром ω_1 и точкой, принадлежащей ω_{N+1}, при условии, что хорда, на которой построена окружность ω_2, стягивает дугу величины 2φ. Радиус ω_2 при этом равен $\sin\varphi$. По предположению индукции, наибольшее возможное расстояние между центром ω_2 и точкой, принадлежащей ω_{N+1}, равно $\sin\varphi\sqrt{N}$. Расстояние между центрами ω_1 и ω_2 равно $\cos\varphi$. Отсюда наибольшее возможное расстояние между центром ω_1 и точкой, принадлежащей ω_{N+1}, равно $\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{N}$. Осталось подобрать угол φ таким образом, чтобы значение $\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{N}$ было максимальным. Заметим, что

$$\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{N} = \sqrt{N+1}\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{N+1}} + \frac{\sin\varphi\sqrt{N}}{\sqrt{N+1}}\right) = \sqrt{N+1}\cos\left(\varphi - \arccos\frac{1}{\sqrt{N+1}}\right) \leqslant \sqrt{N+1},$$

причем при $\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{N+1}}$ достигается равенство. Шаг индукции доказан. Радиус первой окружности равен 1. Поэтому наибольшее возможное расстояние между двумя точками, принадлежащими ω_1 и ω_N, равно $1+\sqrt{N}$. Подставляя $N = 1000000$, находим ответ.

Второе решение. Решим задачу для N окружностей. Пусть точки A и B принадлежат ω_1 и ω_N соответственно. Обозначим за O_i центр окружности ω_i. Очевидно, что $AB \leqslant AO_1 + O_1O_2 + \ldots + O_{N-1}O_N + O_NB$. Заметим, что окружности можно было построить и так, чтобы отрезки AO_1, O_1O_2, …, O_NB имели те же длины и лежали на одной прямой. Значит, наибольшее возможное расстояние AB совпадает с наибольшей возможной суммой $AO_1+O_1O_2+\ldots+O_{N-1}O_N+O_NB$. Введем обозначения: r_i — радиус ω_i, $d_i = O_iO_{i+1}$. Так как O_{i+1} — центр хорды длины $2r_{i+1}$ окружности ω_i, то $r_i^2 = d_i^2+r_{i+1}^2$. Поэтому $r_1^2 = d_1^2+r_2^2 = d_1^2+d_2^2+r_3^2 = \ldots = d_1^2+d_2^2+\ldots+d_{n-1}^2+r_N^2$, откуда

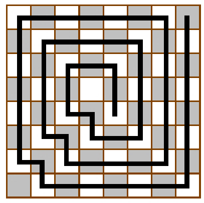
$$AO_1+O_1O_2+\ldots+O_{N-1}O_N+O_NB = r_1+d_1+\ldots+d_{N-1}+r_N \leqslant r_1+N\sqrt{\frac{d_1^2+d_2^2+\ldots+d_{n-1}^2+r_N^2}{N}} = r_1(1+\sqrt{N}).$$

Здесь было использовано неравенство между средним арифметическим и средним квадратическим. Равенство в нем может достигаться при $d_1 = d_2 = \ldots = d_{N-1} = r_N$, что равносильно $d_1^2 = d_2^2 = \ldots = d_{n-1}^2 = r_N^2 = \frac{r_1^2}{N}$. Значит, наибольшее возможное расстояние AB равно $r_1(1+\sqrt{N})$. Подставляя $r_1 = 1$, $N = 1000000$, находим ответ.

Задача 4. Ответ: Все кроме двух.

Указание. Рассмотрим граф из внутренних границ клеток, которые ладья не пересекала. В нем нет висячих вершин внутри доски, и есть как минимум 2 висячие вершины на границе доски. Если их ровно 2, то они принадлежат противоположным краям доски. Если эти висячие вершины соединяются, то они разделяют доску на 2 части, в одной ладья не была. Если не соединяются, то каждой компоненте связности принадлежит цикл, отгораживающий как минимум одну вершину.

Решение.



На рисунке — пример на 62 клетки (стартуем из середины). Докажем теперь, что в любом случае останутся как минимум две не обойденные клетки. Закрасим внутренние границы клеток, которые ладья не пересекала. Будем считать их ребрами графа. Рассмотрим клетки, примыкающие к правому краю доски, и их границы, идущие от края доски. Если ни одна из этих границ не закрашена, то ладья прошла по правому краю и сделала поворот в угловых клетках. Но это были либо два поворота направо, либо два поворота налево, а клетки — разного цвета. Противоречие.

Значит, среди границ правых клеток есть ребро R с концом на краю доски. Аналогично, такое ребро L есть среди границ левых крайних клеток. Если ребра R и L соединены в графе маршрутом, то маршрут разбивает доску на две части, в каждой есть как минимум 6 клеток (по одной с каждой не крайней горизонтали). В одной из этих частей ладья не побывала, значит, она обошла не более 58 клеток. Пусть R и L не соединены. Пойдем от края по ребру R и будем идти по графу, не поворачивая назад. Есть три возможности: а) попадем в вершину, где уже были; б) попадем в вершину на краю доски; в) попадем в вершину v внутри доски, из которой других ребер не входит. На самом деле случай (в) невозможен: тогда бы мы обошли 4 примыкающие к v клетки буквой *П*, сделав два левых или два правых поворота в двух соседних клетках, а они — разного цвета. В случаях (а) и (б) пройденный маршрут разбивает доску на 2 части (в случае (а) есть цикл, в случае (б) маршрут замыкается в цикл краем доски). Аналогично находим такой маршрут, стартуя от края по ребру L. Он добавит еще одну часть. Ладья побывала только в одной из частей, значит, в каждой из оставшихся найдется хотя бы по одной не обойденной клетке.

Задача 5.

Ответ: Люда не может помешать Саше.

Первое решение. Сначала Саша называет число $k = 4$. Пусть Люда назвала число, большее $\operatorname{tg} 18°$. Тогда Саша берёт на окружности вершины прямоугольника $ABCD$ и делит дугу AB точками на 10 равных частей (это все будут точки касания сторон 13-угольника с окружностью). Тогда 4-я сторона касается в точке A. Уменьшая дугу AB почти до $0°$, Саша может сделать 4-ю сторону сколь угодно длинной. Наоборот, раздвигая дугу до $180°$, Саша делает 4-ю сторону сколь угодно близкой к $\operatorname{tg} 18°$.

Пусть Люда назвала число не больше $\operatorname{tg} 18°$. Тогда Саша впишет равнобедренный остроугольный треугольник ABC с основанием AB, и разделит дугу AB на 11 равных частей. Тогда 4-я сторона касается в доп. точке. Сближая A и B, Саша получает все значения меньше $2\operatorname{tg}(180/11)°$.

Набросок второго решения. Сначала Саша называет число $k = 4$. Пусть радиус круга равен 1. Если длина 4-й стороны s больше 1, то Саша делает так: описывает ромб, у которого касательная больше 1, но чуть-чуть меньше нашей стороны. Два угла этого ромба будут острые, два — тупые. Далее, берет две соседние точки касания, соединенные меньшей дугой (концы тупого угла), и описывает около нее равнозвенную ломаную из 9 звеньев, концы ее на сторонах ромба лежат так, чтобы как раз две его стороны стали равны нашей длине s.

Если длина 4-й стороны s меньше или равна 1, Саша делает так. Рисует горизонтальную касательную над кругом так, чтобы ее середина была над центром, длина равна s. После этого вправо продолжает девятизвенной ломаной, у которой одно звено чуть больше половины длины s, а остальные звенья очень маленькие, затем проводит еще звено — большое, и влево от исходной стороны звено — большое, их соединяет нижней горизонтальной касательной. Тогда девять звеньев маленькие, а длина трех звеньев очевидно больше 1.

Задача 6. Для доказательства того, что $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ делится на $[1, 2, \ldots, n]$, нам достаточно доказать, что для любого простого p и натурального k среди чисел вида $a_i - a_j$, где $1 \leqslant i < j \leqslant n$, чисел, делящихся на p^k, не меньше, чем среди чисел вида $i - j$. В самом деле, для целого числа $b = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$ степень вхождения p в b равна сумме степеней вхождения p в b_i, которая в свою очередь равна сумме по всем натуральным k количества таких b_i, которые кратны p^k.

Для каждого p^k рассмотрим, набор $d_0, d_1, \ldots, d_{p^k-1}$, где d_j — количество таких a_i, которые имеют остаток j при делении на p^k (то есть $d_0 + d_1 + \cdots + d_{p^k-1} = n$). Тогда количество чисел среди $a_i - a_j$, делящихся на p^k, есть $\frac{1}{2}(d_0(d_0-1) + d_1(d_1-1) + \cdots + d_{p^k-1}(d_{p^k-1}-1)) = \frac{1}{2}(d_0^2 + d_1^2 + \cdots + d_{p^k-1}^2 - n)$. Осталось доказать, что $d_0^2 + d_1^2 + \cdots + d_{p^k-1}^2$ при фиксированной сумме $d_0 + d_1 + \cdots + d_{p^k-1} = n$ принимает наименьшее значение тогда, когда эти остатки распределены достаточно равномерно (то есть все d_i равны или $\left[\dfrac{n}{p^k}\right]$, или $\left[\dfrac{n}{p^k}\right] + 1$), например, при $a_i = i$. Это нетрудно сделать например методом "шевелений".

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior O-Level Paper **Fall 2009.**[1]

1. Is it possible to cut a square into nine squares and colour one of them white, three of them grey and five of them black, such that squares of the same colour have the same size and squares of different colours will have different sizes?

2. There are forty weights: 1, 2, ..., 40 grams. Ten weights with even masses were put on the left pan of a balance. Ten weights with odd masses were put on the right pan of the balance. The left and the right pans are balanced. Prove that one pan contains two weights whose masses differ by exactly 20 grams.

3. A cardboard circular disk of radius 5 centimetres is placed on the table. While it is possible, Peter puts cardboard squares with side 5 centimetres outside the disk so that:
(1) one vertex of each square lies on the boundary of the disk;
(2) the squares do not overlap;
(3) each square has a common vertex with the preceding one.
Find how many squares Peter can put on the table, and prove that the first and the last of them must also have a common vertex.

4. We only know that the password of a safe consists of 7 different digits. The safe will open if we enter 7 different digits, and one of them matches the corresponding digit of the password. Can we open this safe in less than 7 attempts?

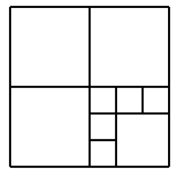
5. A new website registered 2000 people. Each of them invited 1000 other registered people to be their friends. Two people are considered to be friends if and only if they have invited each other. What is the minimum number of pairs of friends on this website?

Note: The problems are worth 3, 4, 4, 5 and 5 points respectively.

[1] Courtesy of Andy Liu.

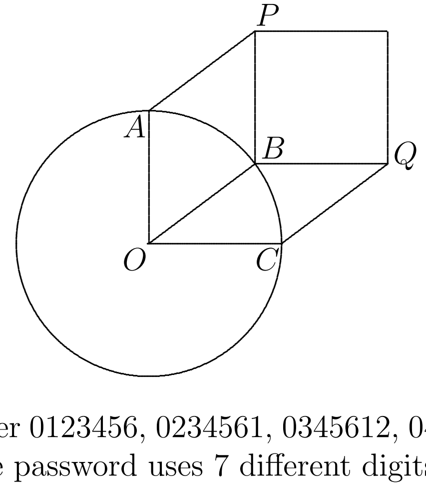
Solution to Junior O-Level Fall 2009

1. The diagram below shows that a 6×6 square can be cut into one 2×2 square, three 3×3 squares and five 1×1 squares.



2. Suppose to the contrary that no two weights in the same pan differ in mass by exactly 20 grams. Then in the right pan, we must have put in exactly one weight from each of the following ten pairs: (1,21), (3,23), …, (19,39). The total mass in the right pan is $1+3+\cdots+19+20k = 100+20k$, where k is the number of times we chose the heavier weight from a pair. This is a multiple of 4. Similarly, the total mass in the left pan is $2+4+\cdots+20+20h = 110+20h$, where h is the number of times we chose the heavier weight from a pair. This is not a multiple of 4. We have a contradiction as the two pans cannot possibly balance.

3. Let O be the centre of the circle, A, B and C be the points of contact with the circle of three squares in order, and P and Q be the common vertices of these squares. Call OA, OB and OC the root canals of the respective squares. Then $OAPB$ and $OBQC$ are rhombi. Moreover, $\angle PBQ = 90°$. Hence $\angle AOC = 90°$. This means that every two alternate root canals are perpendicular. It follows that there must be 8 root canals, and the last square must have a common vertex with the first.



4. In six attempts, we enter 0123456, 0234561, 0345612, 0456123, 0561234 and 0612345. Since the password uses 7 different digits, it must use at

least 3 of the digits 1, 2, 3, 4, 5 and 6. At most one of these 3 can be in the first place. The other 2 must match one of our attempts.

5. Pretend that the 2000 people are seated at a round table, evenly spaced. Each invites the next 1000 people in clockwise order. Then only two people who are diametrically opposite to each other become friends. This shows that the number of pairs of friends may be as low as 1000. Construct a directed graph with 2000 vertices representing the people. Each vertex is incident to 1000 outgoing arcs representing the invitations. The total number of arcs is 2000×1000. The total number of pairs of vertices is $2000 \times 1999 \div 2 = 1999 \times 1000$. Even if every pair of vertices is connected by an arc, we still have $2000 \times 1000 - 1999 = 1000$ extra arcs. These can only appear as arcs going in the opposite direction to existing arcs. It follows that there must be at least 1000 reciprocal invitations, and therefore at least 1000 pairs of friends.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior O-Level Paper **Fall 2009.**[1]

1. A 7-digit passcode is called good if all digits are different. A safe has a good passcode, and it opens if seven digits are entered and one of the digits matches the corresponding digit of the passcode. Is there a method of opening the safe box with an unknown passcode using less than 7 attempts?

2. A, B, C, D, E and F are points in space such that AB is parallel to DE, BC is parallel to EF, CD is parallel to FA, but $AB \neq DE$. Prove that all six points lie in the same plane.

3. Are there positive integers a, b, c and d such that $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 100^{100}$?

4. A point is chosen on each side of a regular 2009-gon. Let S be the area of the 2009-gon with vertices at these points. For each of the chosen points, reflect it across the midpoint of its side. Prove that the 2009-gon with vertices at the images of these reflections also has area S.

5. A country has two capitals and several towns. Some of them are connected by roads. Some of the roads are toll roads where a fee is charged for driving along them. It is known that any route from the south capital to the north capital contains at least ten toll roads. Prove that all toll roads can be distributed among ten companies so that anybody driving from the south capital to the north capital must pay each of these companies.

Note: The problems are worth 4, 4, 4, 4 and 5 points respectively.

[1] Courtesy of Andy Liu.

Solution to Senior O-Level Fall 2009

1. In six attempts, try entering 0123456, 0234561, 0345612, 0456123, 0561234 and 0612345. Since the correct passcode uses 7 different digits, it must use at least 3 of the digits 1, 2, 3, 4, 5 and 6. At most one of these 3 can be in the first place. The other 2 must match one of our attempts.

2. Suppose to the contrary the six points do not all lie in the same plane. Now B, C and D determine a plane, which we may assume to be horizontal. Suppose that E does not lie in this plane. Since AB is parallel to DE , A does not lie in this plane either. Since $AB \neq DE$, A and E do not lie in the same horizontal plane. Since BC is parallel to EF, F lies on the same horizontal plane as E. Since CD is parallel to FA, A lies on the same horizontal plane as F. This is a contradiction. It follows that E also lies on the horizontal plane determined by B, C and D. Since BC is parallel to EF, F also lies in this plane, and since FA is parallel to CD, A does also.

3. For $a = 10^{66}$, $b = 2a$, $c = 3a$ and $d = 4a$, $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3)(100^{33})^3 = 100^{100}$,

4. Let 1 be the side length of the regular 2009-gon $A_1A_2 \dots A_{2009}$. For indexing purposes, we treat 2010 as 1. For $1 \leq k \leq 2009$, let B_k be the chosen point on A_kA_{k+1} with $A_{2010} = A_1$, C_k be the image of reflection of B_k, and $d_k = A_kB_k$. Let $S = d_1+d_2+\cdots+d_{2009}$ and $T = d_1d_2+d_2d_3+\cdots + d_{2009}d_1$. Now $B_1B_2 \dots B_{2009}$ may be obtained from the regular 2009-gon by removing 2009 triangles, each with an angle equal to the interior θ angle of the regular 2009-gon, flanked by two sides of lengths $1 - d_k$ and d_{k+1}. Hence its area is equal to that of the regular 2009-gon minus $\frac{1}{2} \sin\theta$ times $(1 - d_1)d_2 + (1 - d_2)d_3 + \cdots + (1 - d_{2009})d_1 = S - T$. Similarly, the area of $C_1C_2 \dots C_{2009}$ is equal to that of the regular 2009-gon minus $\frac{1}{2} \sin\theta$ times $d_1(1-d_2)+d_2(1-d_3)+\cdots+d_{2009}(1-d_1) = S-T$. Hence these two 2009-gons have the same area.

5. List all possible routes from the south capital to the north capital and index them 1, 2, 3, ... Label the first toll road on each route 1. Now the first toll road in route k may also be a later toll road in another route. Label this toll road in the other route 1, modified to $1(k)$ to

keep track of why it is so labelled. All toll roads on a route between two labelled 1 are also labelled 1. This may trigger further labelling and prolong the round, but at some point, this must terminate. Now label the first unlabelled toll road on each route 2, and so on, until all toll roads have been labelled. We continue the modification process to keep track of on which route a certain label first appears. Note that along each route, the labels on the toll roads either remain the same or increase by 1. Assign all toll roads labelled ℓ to the ℓ-th company. We claim that each route has at least one toll road labelled 10. Assume that the highest label of a toll road on a certain route k_1 is less than 10. If each label appears exactly once on this route, then it has less than 10 toll roads, which is a contradiction. Hence some label appears more than once. Let the highest label which appears more than once be h_1, and consider the last time it appears. It must have been modified to $h_1(k_2)$ for some route k_2. We now follow k_2 until this toll road, and then switch to k_1. This combination must be one of the listed routes, say k_3.

Now the highest label of a toll road on this route is also less than 10. Hence some label appears more than once, and such a label must be less than h_1. Let the highest label which appears more than once be h_2, and consider the last time it appears. It must have been modified to $h_2(k_4)$ for some route k_4. We now follow k_4 until this toll road, and then switch to k_3. Continuing this way, we will find a route in which every label appears exactly once, and the highest label is less than 10. This is a contradiction.

International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior A-Level Paper **Fall 2009** [1]

1 [**4**] Each of 10 identical jars contains some milk, up to 10 percent of its capacity. At any time, we can tell the precise amount of milk in each jar. In a move, we may pour out an exact amount of milk from one jar into each of the other 9 jars, the same amount in each case. Prove that we can have the same amount of milk in each jar after at most 10 moves.

2 [**6**] Mike has 1000 unit cubes. Each has 2 opposite red faces, 2 opposite blue faces and 2 opposite white faces. Mike assembles them into a $10 \times 10 \times 10$ cube. Whenever two unit cubes meet face to face, these two faces have the same colour. Prove that an entire face of the $10 \times 10 \times 10$ cube has the same colour.

3 [**6**] Find all positive integers a and b such that $(a + b^2)(b + a^2) = 2^m$ for some integer m.

4 [**6**] Let $ABCD$ be a rhombus. P is a point on side BC and Q is a point on side CD such that $BP = CQ$. Prove that centroid of triangle APQ lies on the segment BD.

5 We have N objects with weights 1, 2, ..., N grams. We wish to choose two or more of these objects so that the total weight of the chosen objects is equal to average weight of the remaining objects. Prove that

(a) [**2**] if $N + 1$ is a perfect square, then the task is possible;

(b) [**6**] if the task is possible, then $N + 1$ is a perfect square.

6 [**9**] On an infinite chessboard are placed 2009 $n \times n$ cardboard pieces such that each of them covers exactly n^2 cells of the chessboard. Prove that the number of cells of the chessboard which are covered by odd numbers of cardboard pieces is at least n^2.

7 [**12**] Anna and Ben decided to visit Archipelago with 2009 islands. Some pairs of islands are connected by boats which run both ways. Anna and Ben are playing during the trip:

Anna chooses the first island on which they arrive by plane. Then Ben chooses the next island which they could visit. Thereafter, the two take turns choosing an island which they have not yet visited. When they arrive at an island which is connected only to islands they had already visited, whoever's turn to choose next would be the loser. Prove that Anna could always win, regardless of the way Ben played and regardless of the way the islands were connected.

[1]Courtesy of Andy Liu

International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

Solutions to Junior A-Level Paper **Fall 2009**

1. Pour from each jar exactly one tenth of what it initially contains into each of the other nine jars. At the end of these ten operations, each jar will contain one tenth of what is inside each jar initially. Since the total amount of milk remains unchanged, each jar will contain one tenth of the total amount of milk.

2. Assign spatial coordinates to the unit cubes, each dimension ranging from 1 to 10. If all cubes are in the same colour orientation, there is nothing to prove. Hence we may assume that (i, j, k) and $(i + 1, j, k)$ do not. Since they share a left-right face, let the common colour be red. We may assign blue to the front-back faces of (i, j, k). Then its top-bottom faces are white, the front-back faces of $(i+1, j, k)$ are white and the top-bottom faces of $(i + 1, j, k)$ is blue.

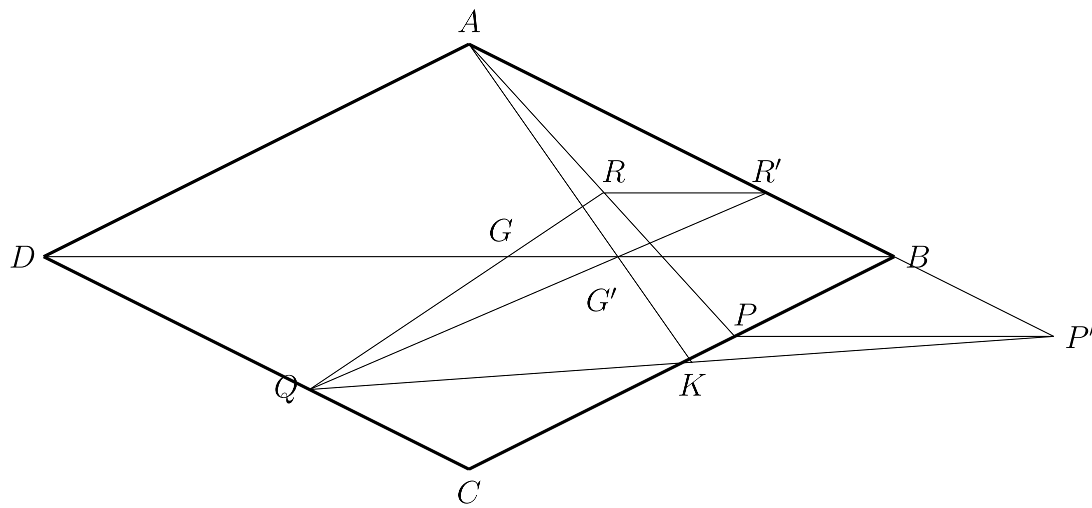
   Now $(i, j + 1, k)$ share a white face with (i, j, k) while $(i + 1, j + 1, k)$ share a blue face with $(i+1, j, k)$. Since $(i, j+1, k)$ and $(i+1, j+1, k)$ share a left-right face, the only available colour is red. It follows that the $1\times 2\times 10$ block with $(i, 1, k)$ and $(i+1, 1, k)$ at one end and $(i, 10, k)$ and $(i + 1, 10, k)$ at the other end has 1×10 faces left and right which are all red.

   Similarly, if we carry out the expansion vertically, we obtain a $2\times 10\times 10$ black with 10×10 faces left and right which are all red. Finally, if we carry out the expansion sideways, we will have the left and right faces of the large cube all red.

3. Suppose $a = b$. Then $a+a^2 = a(a+1)$ is a power of 2, so that each of a and $a+1$ is a power of 2. This is only possible if $a = 1$. Suppose $a \neq b$. By symmetry, we may assume that $a > b$, so that $a^2+b > a+b^2$. Since their product is a power of 2, each is a power of 2.

   Let $a^2 + b = 2^r$ and $a + b^2 = 2^s$ with $r > s$. Then $2^s(2^{r-s} - 1) = 2^r - 2^s = a^2 + b - a - b^2 = (a - b)(a + b - 1)$.

   Now $a-b$ and $a+b-1$ have opposite parity. Hence one of them is equal to 2^s and the other to $2^{r-s} - 1$. If $a - b = 2^s = a + b^2$, then -$b = b^2$.



If $a+b-1=2^s=a+b^2$, then $b-1=b^2$. Both are contradictions. Hence there is a unique solution $a=b=1$.

4. Extend AB to P' so that $BP'=BP=CQ$. Then $BP'CQ$ is a parallelogram so that $P'Q$ and BC bisect each other at a point K.

   Let AK intersect BD at G' and let QG' intersect AB at R'. Since K is the midpoint of BC, its distance from BD is half the distance of C from BD, which is equal to the distance of A from BD. It follows that $AG'=2KG'$.

   Since K is the midpoint of $P'Q$, G' is the centroid of triangle $AP'Q$. Hence $QG'=2R'G'$ and R' is the midpoint of AP'. Let R be the midpoint of AP and let QR intersect BD at G. Then RR' is parallel to PP', which is in turn parallel to BD. Hence $QG=2RG$ so that G is the centroid of triangle APQ.

5. (a) Suppose $n+1=k^2$ for some positive integer k. We take the lightest k objects with total weight $1+2+\cdots+k=k(k+1)/2$ grams. The average weight of the remaining objects is $((k+1)+(k^2-1))/2=k(k+1)/2$ grams also.

   (b) The total weight of the n objects is $1+2+\cdots+n=n(n+1)/2$ grams. Let T grams be the total weight of the k chosen objects. This is also the average weight of the remaining $n-k$ objects. Hence $n(n+1)/2=T(n-k+1)$.

Now $2T(n-k+1) = n(n+1) > n^2+n-k^2+k = (n+k)(n-k+1)$, so that $2T > n+k$. If we choose the lightest k objects, then T attains its maximum value $((k+1)+n)/2$, so that $2T \le n+k+1$. It follows that we must have $2T = n+k+1$, and we must take the lightest k objects. Then $(n+k+1)/2 = T = 1+2+\cdots+k = k(k+1)/2$, so that $n+1 = k^2$.

6. Partition the infinite chessboard into $n \times n$ subboards by horizontal and vertical lines n units apart. Within each subboard, assign the coordinates (i,j) to the square at the i-th row and the j-th column, where $1 \le i,j \le n$. Whenever an $n \times n$ cardboard is placed on the infinite chessboard, it covers n^2 squares all with different coordinates. The total number of times squares with coordinates $(1,1)$ is covered is 2009. Since 2009 is odd, at least one of the squares with coordinates $(1,1)$ is covered by an odd number of cardboards. The same goes for the other n^2-1 coordinates. Hence the total number of squares which are covered an odd number of times is at least n^2.

7. We construct a graph, with the vertices representing the islands and the edges representing connecting routes. The graph may have one or more connected components. Since the total number of vertices is odd, there must be a connected component with an odd number of vertices.

   Anna chooses from this component the largest set of independent edges, that is, edges no two of which have a common endpoint. She will colour these edges red. Since the number of vertices is odd, there is at least one vertex which is not incident with a red vertex. Anna will start the tour there.

   Suppose Ben has a move. It must take the tour to a vertex incident with a red edge. Otherwise, Anna could have colour one more edge red. Anna simply continues the tour by following that red edge. If Ben continues to go to vertices incident with red edges, Anna will always have a ready response. Suppose somehow Ben manages to get to a vertex not incident with a red edge. Consider the tour so far. Both the starting and the finishing vertices are not incident with red edges. In between, the edges are alternately red and uncoloured. If Anna interchanges the red and uncoloured edges on this tour, she could have obtained a larger independent set of edges.

This contradiction shows that Ben could never get to a vertex not incident with red edges, so that Anna always wins if she follows the above strategy. (Solution of Central Jury)

International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior A-Level Paper **Fall 2009.**[1]

1 [**4**] One hundred pirates played cards. When the game was over, each pirate calculated the amount he won or lost. The pirates have a gold sand as a currency; each has enough to pay his debt.

Gold could only change hands in the following way. Either one pirate pays an equal amount to every other pirate, or one pirate receives the same amount from every other pirate.

Prove that after several such steps, it is possible for each winner to receive exactly what he has won and for each loser to pay exactly what he has lost.

2 [**6**] A non-square rectangle is cut into N rectangles of various shapes and sizes. Prove that one can always cut each of these rectangles into two rectangles so that one can construct a square and rectangle, each figure consisting of N pieces.

3 [**7**] Every edge of a tetrahedron is tangent to a given sphere. Prove that the three line segments joining the points of tangency of the three pairs of opposite edges of the tetrahedron are concurrent.

4 [**8**] Denote by $[n]!$ the product $1 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot \underbrace{11\ldots1}_{n \text{ ones}}$ (n factors in total). Prove that $[n+m]!$ is divisible by $[n]! \times [m]!$.

5 [**8**] Let XYZ be a triangle. The convex hexagon $ABCDEF$ is such that AB, CD and EF are parallel and equal to XY, YZ and ZX, respectively. Prove that area of triangle with vertices at the midpoints of BC, DE and FA is no less than area of triangle XYZ.

6 [**10**] Anna and Ben decided to visit Archipelago with 2009 islands. Some pairs of islands are connected by boats which run both ways. Anna and Ben are playing during the trip:

Anna chooses the first island on which they arrive by plane. Then Ben chooses the next island which they could visit. Thereafter, the two take turns choosing an island which they have not yet visited. When they arrive at an island which is connected only to islands they had already visited, whoever's turn to choose next would be the loser. Prove that Anna could always win, regardless of the way Ben played and regardless of the way the islands were connected.

7 [**11**] At the entrance to a cave is a rotating round table. On top of the table are n identical barrels, evenly spaced along its circumference. Inside each barrel is a herring either with its head up or its head down. In a move, Ali Baba chooses from 1 to n of the barrels and turns them upside down. Then the table spins around. When it stops, it is impossible to tell which barrels have been turned over. The cave will open if the heads of the herrings in all n barrels are up or are all down. Determine all values of n for which Ali Baba can open the cave in a finite number of moves.

[1] Courtesy of Andy Liu

International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

Solutions to Seniors A-Level Paper **Fall 2009**

1. A pirate who owes money is put in group A, and the others are put in group B. Each pirate in group A puts the full amount of money he owes into a pot, and the pot is shared equally among all 100 pirates. For each pirate in group B, each of the 100 pirates puts 1/100-th of the amount owed to him in a pot, and this pirate takes the pot. We claim that all debts are then settled. Let a be the total amount of money the pirates in group A owe, and let b be the total amount of money owed by the pirates in group B. Clearly, $a = b$. Each pirate in group A pays off his debt, takes back a/100 and then pays out another $b/100$. Hence he has paid off his debt exactly. Each pirate in group B takes in $a/100$, pays out $b/100$ and then takes inwhat is owed him. Hence the debts to him have been settled too. (Wen-Hsien Sun)

2. Let the given rectangle R have length m and width n with $m > n$. Contract the length of R by a factor of n/m, resulting in an $n \times n$ square. For each of the N rectangle in R, the corresponding rectangle in S has the same width but shorter length. Thus we can cut the former into a primary piece congruent to the latter, plus a secondary piece. Using S as a model, the N primary pieces may be assembled into an $n \times n$ square while the N secondary pieces may be assembled into an $(n - m) \times n$ rectangle. (Rosu Cristina, Jonathan Zung)

3. Let the points of tangency to the sphere of AB, AC, DB and DC be K, L, M and N respectively. The line KL intersects the line BC at some point P not between B and C. By the converse of the undirected version of Menelaus Theorem, since $LA = AK$

$$1 = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CL}{LA} \cdot \frac{AK}{KB} = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CL}{KB}.$$

Since $CL = CN$, $KB = MB$ and $ND = DM$,

$$1 = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CN}{MB} = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CN}{ND} \cdot \frac{DM}{MB}.$$

By the undirected version of Menelaus Theorem, P, M and N are collinear. It follows that K, L, M and N are coplanar, so that KN intersects LM. Similarly, the line joining the points of tangency to the sphere of AD and BC also intersects KN and LM. Since the three lines are not coplanar, they must intersect one another at a single point.

4. Define $f(n) = 1\ldots1$ (n 1s) and $f(0) = 1$ so that $[0]! = 1$. Define

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!}$$

for $0 \le k \le n$.

We use induction on n to prove that $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ is always a positive integer for all $n \ge 1$. For $n = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{[0]!}{[0]![0]!} = 1.$$

Suppose the result holds for some $n \ge 0$. Consider the next case.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} &= \frac{[n+1]!}{[k]![n+1-k]!} \\ &= \frac{[n]!f(n+1)}{[k]![n+1-k]!} \\ &= \frac{[n]!f(n+1-k) \cdot 10^k}{[k]![n-k]!f(n+1-k)} + \frac{[n]!f(k)}{[k-1]![n+1-k]!} \\ &= 10^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Since both terms in the last line are positive integers, the induction argument is complete. In particular, for any positive integers m and n

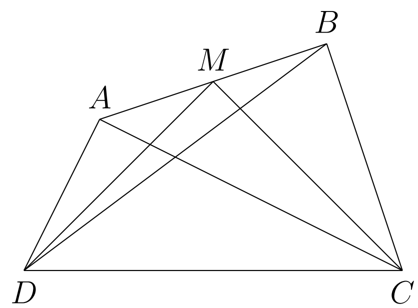
$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix} = \frac{[m+n]!}{[m]![n]!}$$

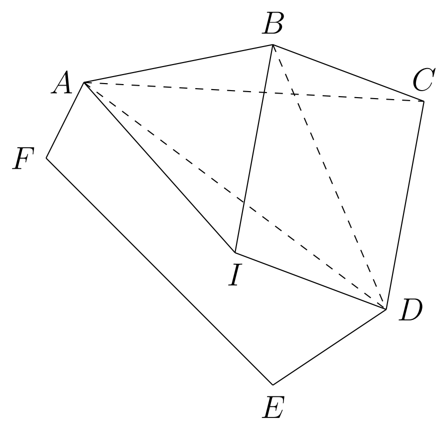
is a positive integer, so that $[m+n]!$ is divisible by $[m]![n]!$. (Jonathan Zung)

5. Denote the area of a polygon P by $[P]$. We first establish

Lemma 1. *Let M be the midpoint of a segment AB which does not intersect another segment CD. Then $[CMD] = ([CAD] + [CBD])/2$.*

Proof. Really, each of three triangles have base CD and height of triangle CMD is average of the sum of the heights of triangles CAD and CBD. □





Returning to the problem, let P, Q and R be the respective midpoints of BC, DE and FA. By the Lemma, we have

$$[PQR] = \frac{1}{2}([BQR]+[CQR]) = \frac{1}{4}([BDR]+[BER]+[CDR]+[CER]) =$$

$$\frac{1}{8}([BAD]+[BFD]+[BAE]+[BFE]+[CAD]+[CFD]+[CAE]+[CFE]).$$

Let I be the point such that triangle ABI is congruent to triangle XYZ. Then $BCDI$ and $EFAI$ are parallelograms. Since $ABCDEF$ is convex, point I is inside the hexagon. Hence $[XYZ] < [ABCDEF]$.

Note that the distance of D from AB is equal to the sum of the distances from C and I to AB; hence, $[BAD] = [BAC] + [BAI] = [BAC] + [XYZ]$.

Similarly, $[BAE] = [BAF] = [XYZ]$. Let J and K be the points such that JCD and FKE are congruent to XYZ. Then we have

$$[ACD] = [BCD] + [XYZ], \qquad [FCD] = [ECD] + [XYZ],$$
$$[BFE] = [AFE] + [XYZ], \qquad [CFE] = [DFE] + [XYZ].$$

It follows that $[PQR] = \frac{1}{2}(2[ABCDEF]+6[XYZ]) > [XYZ]$. (Central Jury)

Remark: The solution above makes a reasonable assumption that triangle XYZ and hexagon $ABCDEF$ are in the same orientation. If they are not then some modifications to the argument are necessary. However, this complication is a mere detraction to an already very nice problem.

6. We construct a graph, with the vertices representing the islands and the edges representing connecting routes. The graph may have one or more connected components. Since the total number of vertices is odd, there must be a connected component with an odd number of vertices.

   Anna chooses from this component the largest set of independent edges, that is, edges no two of which have a common endpoint. She will colour these edges red. Since the number of vertices is odd, there is at least one vertex which is not incident with a red vertex. Anna will start the tour there.

   Suppose Ben has a move. It must take the tour to a vertex incident with a red edge. Otherwise, Anna could have colour one more edge red. Anna simply continues the tour by following that red edge. If Ben continues to go to vertices incident with red edges, Anna will always have a ready response. Suppose somehow Ben manages to get to a vertex not incident with a red edge. Consider the tour so far. Both the starting and the finishing vertices are not incident with red edges. In between, the edges are alternately red and uncoloured. If Anna interchanges the red and uncoloured edges on this tour, she could have obtained a larger independent set of edges.

   This contradiction shows that Ben could never get to a vertex not incident with red edges, so that Anna always wins if she follows the above strategy. (Solution of Central Jury)

7. Answer: As $N = 2^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

   Solution Let us replace barrels by digits "0"s and "1"s arranged in a circular way.

   (i) Let $N \neq 2^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Let us prove that without good luck Ali Baba never opens the cave. We can assume that we are playing against Ali Baba, spinning the circle, and he tells us in advance where he going to change digits in each round, including the first one.

Assume N is odd. Let us place digits "0"s and "1"s to prevent Ali Baba win in the first round. This means that after his first move (which we know) there are both digits "0"s and "1"s.

Let Ali-Baba at some round select k positions. He wins at this round if and only if these k positions coincide either with the set of all "0"s or with the set of all "1"s. But the number of "0"s is not equal to the number of "1"s as their sum is odd and therefore at least one of these numbers differs from k. Then moving such digit to one of selected k positions we prevent Ali Baba from winning at this round.

(ii) The case when N is even but has an odd factor m could be reduced to the previous one. Let us mark on the circle m equidistant positions and forget about all others. Then using the same method as in (i) we can prevent Ali Baba from making digits on these m position equal.

(iii) Algorithm of Ali Baba' win for $N = 2^k$ we construct by induction. The base of induction $k = 1$ is trivial. Let Ali Baba has algorithm A_m for m barrels. Let us construct A_{2m}. All positions for N=2m we split into m pairs of opposite positions . Then we establish one-to-one correspondence between pairs for $N = 2m$ and positions for $N = m$.

First, let us consider the special cases.

(a) Assume that in each pair digits are the same. Then we can apply A_m (with pairs instead of positions). If we unlock the cave in first case ($N = m$) then the cave will be unlocked in second case.

(b) Consider the parity of the sum in each pair. Assume that all parities are the same. Let us apply algorithm A_m; if cave is unlocked then all the parities were odd. However, changing both digits in a pair we do not change the parity of pair, therefore, all the parities remain odd. Let us change exactly one digit in each pair (call this operation D). Then all the parities became even. Applying A_m one more time we unlock the cave. Let us call this algorithm B.

(c) Consider a general case. Let us apply algorithm A_m in the different way: our goal is to make all parities equal. So, we apply A_m but this time changing in each pair only one digit. Call this algorithm C. It guarantees that at some step all parities will coincide. However, we do not know when it will happen. So, we apply the following trick: after each step of applying C we apply B and then D. If after C the parities coincide then B unlocks the cave. Otherwise, BD does not change parities, so parities after C and CBD are the same. As $\underbrace{C \dots C}_{j \text{ times}}$ makes parities equal and since $\underbrace{CBD \dots CBD}_{j \text{ times}}$ makes parities equal as well then $\underbrace{CBD \dots CBD}_{j-1 \text{ times}} CB$ unlocks the cave.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior O-Level Paper **Spring 2010.**[1]

1. Each of six baskets contains some pears, plums and apples. The number of plums in each basket is equal to the total number of apples in the other five baskets, and the number of apples in each basket is equal to the total number of pears in the other five baskets. Prove that the total number of fruit in the six baskets is a multiple of 31.

2. Karlsson and Lillebror are dividing a square cake. Karlsson chooses a point P of the cake which is not on the boundary. Lillebror makes a straight cut from P to the boundary of the cake, in any direction he chooses. Then Karlsson makes a straight cut from P to the boundary, at a right angle to the first cut. Lillebror will get the smaller of the two pieces. Can Karlsson prevent Lillebror from getting at least one quarter of the cake?

3. An angle is given in the plane, and a compass is the only available tool.

   (a) Use the compass the minimum number of times to determine if the angle is acute or obtuse.

   (b) Use the compass any number of times to determine if the angle is exactly 31°.

4. At a party, each person knows at least three other people. Prove that an even number of them, at least four, can sit at a round table such that each knows both neighbours.

5. On the blackboard are the squares of the first 101 positive integers. In each move, we can replace two of them by the absolute value of their differences. After 100 moves, only one number remains. What is the minimum value of this number?

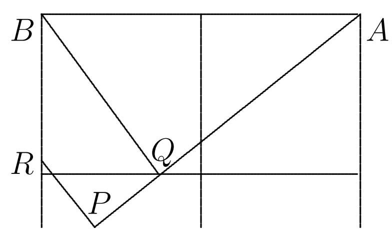
Note: The problems are worth 3, 3, 2+2, 5 and 5 points respectively.

[1] Courtesy of Andy Liu.

Solution to Junior O-Level Spring 2010

1. In counting the total number of apples, we have counted each pear five times. Hence the total number of apples is five times the total number of pears. Similarly, in counting the total number of plums, we have counted each apple five times, the total number of plums is five times the total number of apples, and twenty-five times the total number of pears. It follows that the total number of fruit is equal to the total number of pears times 1+5+25=31, and is therefore a multiple of 31.

2. Lillebror can always get at least one quarter of the cake. Imagine the cake divided into quadrants by a horizontal gridline and a vertical gridline. By symmetry, we may assume that P is in the southwest quadrant. Then Lillebror makes a straight cut towards the northeast corner A, intersecting the horizontal grid line at the point Q. Karlsson will cut towards a point R below the northwest corner B, so that Lillebror gets the quadrilateral $ABRP$. Now the circle with AB as diameter is tangent to the horizontal grid line. Hence Q is either on or outside this circle, so that $\angle BQA \leq 90°$. Since $\angle RPA = 90°$, the segments BQ and RP cannot cross, so that triangle ABQ lies entirely within the quadrilateral $ABRP$. However, the area of ABQ is exactly one quarter that of the square. Karlsson's only way to keep Lillebror from getting more than one quarter of the cake is to choose P at the centre of the cake.



3. (a) **Solution by Olga Ivrii.**
Let O be the vertex of the given angle. Let P be any point on one arm of the angle other than O. Draw a circle with centre P and radius OP. If the other arm is tangent to the circle, then the given angle is a right angle. If the other arm intersects the circle in two points, then the given angle is acute. If the other arm misses the circle, then the given angle is obtuse. Hence the task can be accomplished using the compass only once.

   (b) **Solution by Wen-Hsien Sun.**
Let O be the vertex of the given angle. Draw a circle Ω with centre O and arbitrary radius, cutting the two arms of the angle at A_0 and A_1 respectively. Using A_1A_2 as radius, mark off on Ω successive points $A_2,\ A_3,\ \ldots$ so that $A_0A_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots$. Then $\angle A_0OA_1 = 31°$ if and only if $A_{360} = A_0$ but $A_k \neq A_0$ for $1 \leq k \leq 359$, and we have gone around Ω exactly 31 times.

4. Construct a graph where the vertices represent the people, and two vertices are joined by an edge if and only if the people they represent know each other. We have to show that there exists an even cycle. We use mathematical induction on the number of vertices. The base with four vertices is trivial since we must have a complete graph. In general, since the average degree of each vertex is at least three, there are more edges than vertices, so that the graph must contain a cycle $\mathcal{C}$. If it is an even cycle, there is nothing further to prove. Suppose it is an odd cycle. Select any vertex V on $\mathcal{C}$. Since the degree of V is at least three, it is incident with an edge e not on $\mathcal{C}$. We leave $\mathcal{C}$ from V along e and try to return to any vertex on $\mathcal{C}$ without using any edge twice. There are three possibilities.

Case 1. Suppose it is impossible to return to $\mathcal{C}$.
Then the removal of e will separate the graph into two components. We identify the other endpoint of e with V, obtaining a graph with one less vertex which nevertheless satisfies the condition that each vertex is of degree at least three. By the induction hypothesis, this graph has an even cycle. Since the removal of V will also separate this graph into two components, the cycle cannot pass through V, so that it must lie entirely on one side of it. Hence the same cycle is in the original graph before the contraction.
Case 2. Suppose we return to $\mathcal{C}$ for the first time at another vertex U.
Then there are three disjoint paths joining U and V, and two of them will form an even cycle.
Case 3. We always return to $\mathcal{C}$ at the vertex V.
This has to happen with every vertex on $\mathcal{C}$, as otherwise we can leave $\mathcal{C}$ from a different vertex so that either Case 1 or Case 2 applies. Hence each vertex in $\mathcal{C}$ is incident with at least two edges not on $\mathcal{C}$. Let d and f be the edges on $\mathcal{C}$ incident with V. We identify the other endpoint of d with V and remove f, obtaining a graph with one less vertex which nevertheless satisfies the condition that each vertex is of degree at least three. By the induction hypothesis, the resulting graph has an even cycle. Since the removal of V will separate this graph into three components, the cycle cannot pass through V, so that it must lie entirely on one of the three pieces. Hence the same cycle is in the original graph before the contraction.

5. There are 51 odd numbers and 50 even numbers on the blackboard. Each move either keeps the number of odd numbers unchanged, or reduces it by 2. It follows that the last number must be odd, and its minimum value is 1. The squares of four consecutive integers can be replaced by a 4 because $(n+2)^2+(n-1)^2-(n+1)^2-n^2=4$. Hence the squares of eight consecutive integers can be replaced by 0. Taking the squares off from the end eight at a time, we may be left with 1, 4, 9, 16 and 25. However, the best we can get out of these five numbers is 3. Hence we must include 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144 and 169. The sequence of combinations may be $169-144=25$, $25-25=0$, $100-0=100$, $100-64=36$, $36-36=0$, $121-0=121$, $121-81=40$, $49-40=9$, $16-9=7$, $9-7=2$, $4-2=2$ and $2-1=1$.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior O-Level Paper **Spring 2010.**[1]

1. Bananas, lemons and pineapples are being delivered by 2010 ships. The number of bananas in each ship is equal to the total number of lemons in the other 2009 ships, and the number of lemons in each ship is equal to the total number of pineapples in the other 2009 ships. Prove that the total number of fruit being delivered is a multiple of 31.
2. Each line in the coordinate plane has the same number of common points with the parabola $y = x^2$ and with the graph $y = f(x)$. Prove that $f(x) = x^2$.
3. Is it possible to cover the surface of a regular octahedron by several regular hexagons, without gaps or overlaps?
4. Baron Münchausen claims that a polynomial $P(x)$ with non-negative integers as coefficients is uniquely determined by the values of $P(2)$ and $P(P(2))$. Surely the Baron is wrong, isn't he?
5. A segment is given on the plane. In each move, it may be rotated about either of its endpoints in a $45°$ angle clockwise or counterclockwise. Is it possible that after a finite number of moves, the segment returns to its original position except that its endpoints are interchanged?

Note: The problems are worth 3, 4, 5, 5 and 6 points respectively.

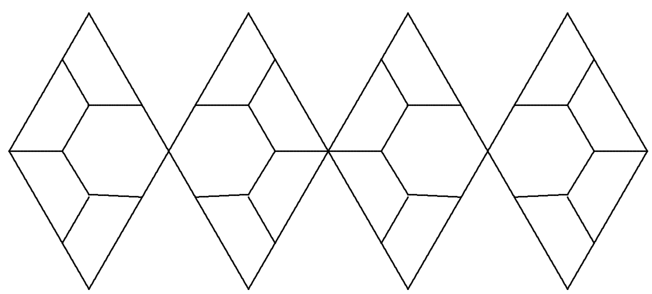
[1]Courtesy of Andy Liu.

Solution to Senior O-Level Spring 2010

1. In counting the total number of lemons, we have counted each pineapple 2009 times. Hence the total number of lemons is 2009 times the total number of pineapples. Similarly, in counting the total number of bananas, we have counted each lemon 2009 times. Hence the total number of bananas is 2009 times the total number of lemons, and $2009^2 = 4036081$ times the total number of pineapples. It follows that the total number of fruit is equal to the total number of pineapples times $1 + 2009 + 4036081 = 4038091 = 31 \times 130261$, and is therefore a multiple of 31.

2. Note that $f(x)$ is uniquely defined for all x since it is given to be a function. In any case, since $y = x^2$ intersects each vertical line in exactly one point, so does $y = f(x)$. Let S be the region of the plane below $y = x^2$. Every point in S lies on a line which does not intersect $y = x^2$. Hence no point of $y = f(x)$ can belong to S. For any real number r, consider the line tangent to $y = x^2$ at the point (r, r^2). Except for this point, the line lies entirely in S. Since this line intersects $y = f(x)$ at exactly one point, we must have $f(r) = r^2$. Since r is an arbitrary real number, $f(x) = x^2$.

3. It is possible to accomplish the task with twelve hexagons, as shown in the diagram below.



4. **Solution by Central Jury.**
Let $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, where the coefficients are non-negative integers. Suppose $P(2) = b$. Then $b = a_0 2^n + a_1 2^{n-1} + \cdots + a_n > a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. It follows that we have $b^n > b^{n-1}(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) \geq a_1 b^{n-1} + \cdots + a_{n-1}b + a_n$. Now $\frac{P(b)}{b^n} = a_0 + \frac{a_1 b^{n-1} + \cdots + a_{n-1}b + a_n}{b * n}$. Then $a_0 = \lfloor \frac{P(b)}{b^n} \rfloor$, where n is the largest integer for which $P(b) \geq b^n$. In an analogous manner, $a_1 = \lfloor \frac{P(b) - a_0 b^n}{b^{n-1}} \rfloor$, and so on. It follows that $P(x)$ is uniquely determined, and the Baron is right!
Remark:
The values of $P(2)$ and $P(P(2))$ cannot be assigned arbitrarily. Suppose we have $P(2) = 13$ and $P(13) = 2224$, the above algorithm yields $n = 3$, $a_0 = \lfloor \frac{2224}{13^3} \rfloor = 1$, $a_1 = \lfloor \frac{2224 - 13^3}{13^2} \rfloor = 0$, $a_2 = \lfloor \frac{2224 - 2197}{13} \rfloor = 2$ and $a_3 = 27 - 2 \times 13 = 1$. On the other hand, if $P(2) = 3$ and $P(3) = 5$, we get $n = 1$, $a_0 = \lfloor \frac{5}{3} \rfloor = 1$ and $a_1 = 5 - 3 = 2$, but $P(x) = x + 2$ yields $P(2) = 4$. This is because the correct polynomial $P(x) = 2x - 1$ does not satisfy the hypothesis of the problem, and the above algorithm cannot be applied.

5. **Solution by Jonathan Zung.**
Suppose the task is possible. Let the segment be of length 1. Label one of its endpoints A and the other B. We combine consecutive moves making rotations about the same point into one, so that the new moves alternately rotate about A and B through an angle which is a multiple of $45°$. Denote the initial positions of A and B by A_0 and B_0 respectively. By symmetry, we may assume that the first rotation is about B. Denote the new position of A by A_1. The next rotation is about A_1. Denote the new position of B by B_1. Continue until $A_k = B_0$ or $B_k = A_0$ for some k. We may assume that the former is the case. Then we have a $(2k-1)$-gon $A_1B_1 \ldots A_k$ whose edges are all of length 1 and may intersect one another. Each horizontal edge represents a horizontal displacement of 1 unit, while each slanting edge represents a horizontal displacement of $\frac{1}{\sqrt{2}}$ unit. These are incommensurable. In going around the perimeter of the polygon once, the net horizontal displacement is 0. Hence we must have an even number of horizontal edges and an even number of slanting edges. Similarly, we must also have an even number of vertical edges. Hence the total number of edges of this polygon must be even, but a $(2k-1)$-gon has an odd number of edges. This is a contradiction.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior A-Level Paper **Spring 2010.**[1]

1. Alex has a piece of cheese. He chooses a positive number $\alpha \neq 1$ and cut the piece into two, in the ratio $1 : \alpha$. He can then choose any piece and cut it in the same way. Is it possible for him to obtain, after a finite number of cuts, two piles of pieces each containing half the original amount of cheese?

2. M is the midpoint of the side CA of triangle ABC. P is some point on the side BC. AP and BM intersect at the point O. If $BO = BP$, determine $\frac{OM}{PC}$.

3. Along a circle are placed 999 numbers, each 1 or -1, and there is at least one of each. The product of each block of 10 adjacent numbers along the circle is computed. Let S denote the sum of these 999 products.
(a) What is the minimum value of S?
(b) What is the maximum value of S?

4. Is it possible that the sum of the digits of a positive integer n is 100 while the sum of the digits of the number n^3 is 100^3?

5. On a circular road are N horsemen, riding in the same direction, each at a different constant speed. There is only one point along the road at which a horseman is allowed to pass another horseman. Can they continue to ride for an arbitrarily long period if
(a) $N = 3$;
(b) $N = 10$?

6. A broken line consists of 31 segments joined end to end. It does not intersect itself, and has distinct end points. What is the smallest number of straight lines which can contain all segments of such a broken line?

7. A number of fleas are on a 10×10 chessboard, each in a different cell. Every minute, a flea jumps to the adjacent square either to the east, to the south, to the west or to the north. It continues to jump in the same direction as long as this is possible, but reverses direction if it has reached the edge of the chessboard. In one hour, no two fleas ever occupy the same cell. What is the maximum number of fleas on the chessboard?

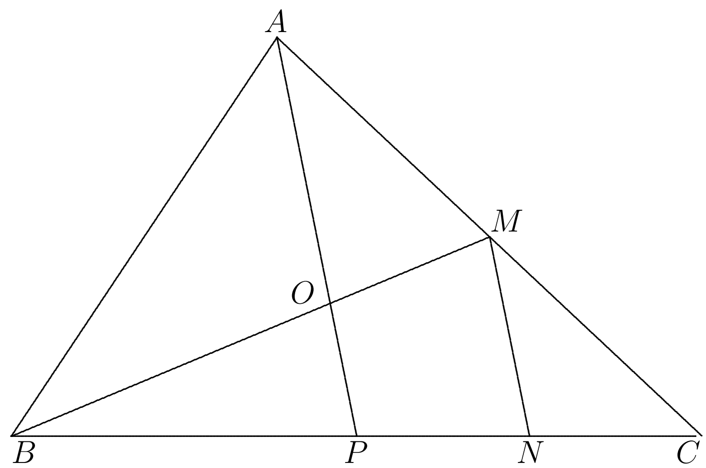
Note: The problems are worth 3, 4, 3+3, 6, 3+5, 8 and 11 points respectively.

[1] Courtesy of Andy Liu.

Solution to Junior A-Level Spring 2010

1. **Solution by Olga Ivrii.**
Let $\alpha > 1$. The first cut creates the piece $\frac{\alpha}{\alpha+1}$ and $\frac{1}{\alpha+1}$. Then cut the larger piece into $\frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2}$ and $\frac{\alpha}{(\alpha+1)^2}$. We want $\frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2} = \frac{\alpha}{(\alpha+1)^2} + \frac{1}{\alpha+1}$ or $\alpha^2 = \alpha + \alpha + 1$. Solving $\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0$, we have $\alpha = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Since $\alpha > 0$, $\alpha = \sqrt{2} + 1$.

2. Through M, draw a line parallel to AP, intersecting BC at N. Since triangles CMN and CAP are similar and $AM = MC$, $PN = NC$. Since triangles BOP and BMN are similar and $BO = BP$, $OM = PN$. Hence $\frac{OM}{PC} = \frac{OM}{2PN} = \frac{1}{2}$.



3. Since each product is equal to 1 or -1, the value of S is always odd. Let the numbers be $a_1, a_2, \ldots, a_{999}$ in cyclic order, with $a_n = a_{n-999}$ whenever $n > 999$.

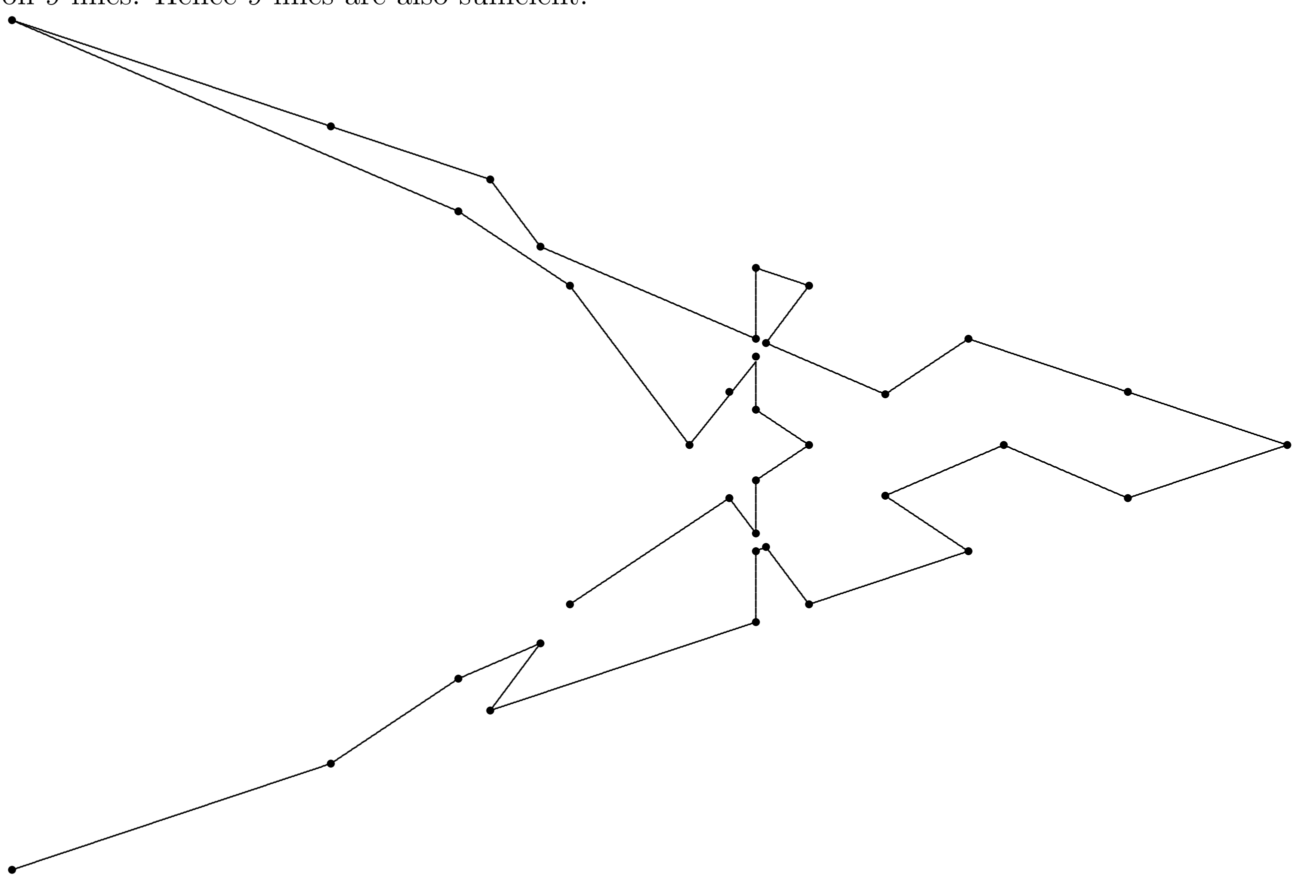
   (a) The minimum value of S is -997. This can be attained by having 100 copies of -1, each adjacent pair separated by 9 copies of 1, except for one pair which is separated by just 8 copies of 1. Every block of 10 adjacent numbers contains exactly 1 copy of -1, the sole exception being the block with 1 copy of -1 at either end and 8 copies of 1 in between. If -997 is not the minimum value, it would have to be -999, meaning that all 999 products are equal to -1. Since $a_1 a_2 \cdots a_{10} = -1 = a_2 a_3 \cdots a_{11}$, we must have $a_1 = a_{11}$. Similarly, $a_{11} = a_{21} = \cdots = a_{9981}$. Since 10 and 999 are relatively prime, all these 999 subscripts are different. This means that we have either 999 copies of 1 or 999 copies of -1. This is forbidden.

   (b) The maximum value of S is 995. This can be attained by having 2 adjacent copies of -1 and 997 copies of 1. There are only two blocks of 10 adjacent numbers which contain exactly one copy of -1 and have -1 as products. All other blocks have 1 as products. If 995 is not the maximum value, it would have to be 997 or 999. We cannot have 999 since this means all 999 numbers are copies of 1, or all are copies of -1, which is forbidden. Suppose it is 997, which means that exactly one block of 10 adjacent numbers has product -1. Let $a_1 a_2 \cdots a_{10} = -1$. Then $a_1 = -a_{11}$ but $a_{11} = a_{21} = \cdots = a_{9981}$. Since 10 and 999 are relatively prime, all these 999 subscripts are different. Hence all 999 numbers are equal except one, and there are exactly ten blocks of 10 adjacent numbers with product -1, so that $S = 979$.

4. **Solution by Daniel Spivak.**
Let $n = 10^{4^1} + 10^{4^2} + \cdots + 10^{4^{100}}$. Then the sum of the digits of n is 100. Consider n^3. It is the sum of 100^3 terms each a product of three powers of 10. We claim that if two such terms are equal, they must be products of the same three powers of 10. If $4^a + 4^b + 4^c = 4^x + 4^y + 4^z$, where $a \le b \le c$ and $x \le y \le z \le c$, we must have $z = c$. Otherwise, even if $x = y = z = c-1$, we still have $3(4^{c-1}) < 4^c$. Similarly, we must have $y = b$ and $x = a$, justifying the claim. Now a product of the same three powers of 10 can occur at most 3!=6 times. Hence there is no carrying in adding these 100^3 terms, which means that the sum of the digits of n^3 is exactly 100^3.

5. **Solution by Jonathan Zung.**
We use induction on the number n of runners. For $n = 1$, there is nothing to prove. Suppose the result holds for some $n \ge 1$, each with a distinct integer speed. Let M be the least common multiple of these speeds. If we add an $(n+1)$-st runner with speed 0 at the passing point, the result still holds. Now increase the speed of each of the $n+1$ runners by M. Since their relative speeds remain the same, the result continues to hold. In particular, it holds for $n = 3$ and $n = 10$.

6. **Solution by Daniel Spivak.**
We first show that 9 lines are necessary. If we only have 8 lines, they generate at most 28 points of intersection. Since the broken line can only change directions at these points, it can have at most 29 segments. The diagram below shows a broken line with 32 segments all lying on 9 lines. Hence 9 lines are also sufficient.



7. **Solution by Peter Xie.**

We claim that on each row or column, there are at most 2 fleas, so that the total number of fleas on the board is at most $2\times 10+2\times 10=40$. Suppose there are 3 fleas on a row or column. By the Pigeonhole Principle, two of them must occupy cells of the same colour. These 2 fleas must occupy the same cell well before an hour has elapsed. This justified the claim. We now show a construction whereby there can be as many as 40 fleas on the chessboard.

	↓	→					←	↓	
↓	→			↓	↓			←	↓
→			↓			↓			←
	→	↓					↓	←	
	←							→	
	←							→	
	→	↑					↑	←	
→			↑			↑			←
↑	→			↑	↑			←	↑
	↑	→					←	↑	

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior A-Level Paper **Spring 2010.**[1]

1. Is it possible to divide the lines in the plane into pairs of perpendicular lines so that every line belongs to exactly one pair?

2. Alex has a piece of cheese. He chooses a positive number α and cut the piece into two, in the ratio $1 : \alpha$. He can then choose any piece and cut it in the same way. Is it possible for him to obtain, after a finite number of cuts, two piles of pieces each containing half the original amount of cheese, if
(a) α is irrational;
(b) $\alpha \neq 1$ is rational?

3. Can we obtain the number 2010 from the number 1 by applying any combination of the functions sin, cos, tan, cot, arcsin, arccos, arctan and arccot?

4. At a convention, each of the 5000 participants watched at least one movie. Several participants can form a discussion group if either they had all watched the same movie, or each had watched a movie nobody else in the group had. A single participant may also form a group. Prove that the number of groups could always be exactly 100.

5. On a circular road are 33 horsemen, riding in the same direction, each at a different constant speed. There is only one point along the road at which a horseman is allowed to pass another horseman. Can they continue to ride for an arbitrarily long period?

6. A circle with centre I is tangent to all four sides of a convex quadrilateral $ABCD$. M and N are the midpoints of AB and CD respectively. If $\frac{IM}{AB} = \frac{IN}{CD}$, prove that $ABCD$ has a pair of parallel sides.

7. A multi-digit number is written on the blackboard. Susan puts in a number of plus signs between some pairs of adjacent digits. The addition is performed and the process is repeated with the sum. Prove that regardless of what number was initially on the blackboard, Susan can always obtain a single-digit number in at most ten steps.

Note: The problems are worth 3, 2+2, 6, 6, 7, 8 and 9 points respectively.

[1]Courtesy of Andy Liu.

Solution to Senior A-Level Spring 2010

1. Form families consisting of all mutually parallel lines. Put into a group two families whose lines are perpendicular. For each group, choose an arbitrary line ℓ not parallel to either family. Each line in a family intersects exactly one point of ℓ, and each point of ℓ lies on exactly one line in the family. Thus each point of ℓ defined one line from each family, and these two lines form a pair. This procedure may be applied to all groups, so that every line in the plane is in exactly one pair.

2. **Solution by Central Jury.**

   (a) Let $\alpha < 1$. The first cut creates the piece $\frac{1}{1+\alpha}$ and $\frac{\alpha}{1+\alpha}$. Then cut the larger piece into $\frac{1}{(1+\alpha)^2}$ and $\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2}$. We want $\frac{1}{(1+\alpha)^2} = \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} + \frac{\alpha}{1+\alpha}$ or $1 = \alpha + \alpha(1+\alpha)$. Solving $\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$, we have $\alpha = \frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$. Since $\alpha > 0$, $\alpha = \sqrt{2} - 1$.

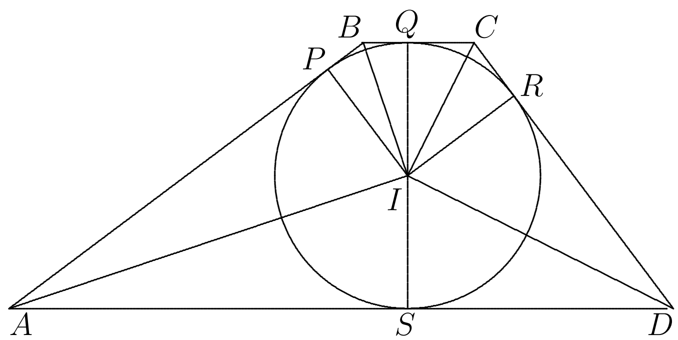
   (b) Let $\alpha = \frac{m}{n}$ where m and n are relatively prime positive integers. In the first step, we have the pieces $\frac{m}{m+n}$ and $\frac{n}{m+n}$. In all subsequent steps, we will cut all pieces. There is no harm in assuming this since the two parts of a piece which is not to be cut can just stay together. Suppose the task is accomplished after k steps. Each of the 2^k pieces is $\frac{m^i n^{k-i}}{(m+n)^k}$ for $0 \le i \le k$, with $i = 0$ occuring only once. Each numerator is a multiple of m except for n^k. Thus the division into two piles of equal amount is not possible.

3. **Solution by Zhi Qiang Liu.**
   If $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$, then $\arctan x$ is an angle θ in a right triangle with opposite side 1 and adjacent side $\sqrt{n}$. By Pythagoras' Theorem, the length of the hypotenuse is $\sqrt{n+1}$, so that $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Define $f(x) = \sin(\arctan x)$. Starting with $1 = \frac{1}{\sqrt{1}}$, we can apply $f(x)$ repeatedly and obtain $\frac{1}{\sqrt{2010^2}} = \frac{1}{2010}$. Now $\cot(\arctan \frac{1}{2010}) = 2010$.

4. **Solution by Zhi Qiang Liu and Cristina Rosu, independently.**
   We construct united groups in the first stage and diverse groups in the second stage. In the k-th step of the first stage, we create a united group of size at least $101-k$. This stage terminates, perhaps even immediately, when no such groups can be formed. If this is as a result of having nobody left, then we have formed at most 100 groups since $1+2+\cdots+100 > 5000$. We can take individuals out of existing groups to form groups of one until we have exactly 100 groups. Suppose after the n-th step, we cannot form a united group of size at least $101-(n+1)$ from the remaining participants. We proceed to the second stage. We have created n united groups, and now we create $100-n$ diverse groups. Start with any movie watched by at least one of these participants. There are less than $100-n$ of them, and they can be put into separate groups. This will be the movie each of them has watched that nobody else in their group would have. Take another movie watched by at least one of the remaining participants. There are less than $100-n$ of them, including some who are already in the groups. Those that are not can now join groups not including anyone who has watched this movie. The remaining participants can be added to the groups in an analogous manner. If some of these $100-n$ groups happen to be empty, we can take individuals out out of existing groups to form groups of one until we have exactly 100 groups.

5. **Solution by Jonathan Zung.**
We use induction on the number n of runners. For $n = 1$, there is nothing to prove. Suppose the result holds for some $n \geq 1$, each with a distinct integer speed. Let M be the least common multiple of these speeds. If we add an $(n+1)$-st runner with speed 0 at the passing point, the result still holds. Now increase the speed of each of the $n+1$ runners by M. Since their relative speeds remain the same, the result continues to hold. In particular, it holds for $n = 33$.

6. **Solution by Jonathan Zung.**
Let P, Q, R and S be the points of tangency of the circle with AB, BC, CD and DA respectively. Let $\angle AIS = \angle AIP = \alpha$, $\angle BIP = \angle BIQ = \beta$, $\angle CIQ = \angle CIR = \gamma$ and $\angle DIR = \angle DIS = \delta$. Then $\angle AIB + \angle CID = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$. If $\angle AIB > 90^\circ$, then $\angle CID < 90^\circ$. The point I will be inside the circle with AB as diamter but outside the circle with CD as diameter. Hence $\frac{IM}{AB} < \frac{1}{2} < \frac{IN}{CD}$. Similarly, if $\angle AIB < 90^\circ$, then $\frac{IM}{AB} > \frac{1}{2} > \frac{IN}{CD}$. Both contradict the hypothesis that $\frac{IM}{AB} = \frac{IN}{CD}$. Hence $\alpha + \beta = \angle AIB = 90^\circ$ so that Q, I and S are collinear. Since both BC and DA are perpendicular to QS, they are parallel to each other.



7. **Solution by Jonathan Zung.**
We use an overline to denote the concatenation of digits. Let the given number be $\overline{a_0a_1a_2\ldots a_n}$ and the sum of the digits be S. Suppose $S \leq 10^{10}$. By putting a plus sign between every pair of adjacent digits in each step, Susan obtain a number with at most 11 digits in the first step, a number at most 99 in the second step, a number at most 18 in the third step and a single-digit number on the fourth step. Suppose $S > 10^{10}$. Define $A = \overline{a_0a_1a_2} + \overline{a_3a_4a_5} + \overline{a_6a_7a_8} + \cdots$, $B = a_0 + \overline{a_1a_2a_3} + \overline{a_4a_5a_6} + \overline{a_7a_8a_9} + \cdots$ and $C = \overline{a_0a_1} + \overline{a_2a_3a_4} + \overline{a_5a_6a_7} + \cdots$. Note that $A + B + C > 100S$ so that one of A, B and C is greater than $10S$. By symmetry, we may assume it is B. Then there exists a positive integer t such that $S < 10^t < B$. Consider now the following sequence of numbers.

$$\begin{aligned}
S &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots, \\
& \quad a_0 + \overline{a_1a_2a_3} + a_4 + a_5 + \cdots, \\
& \quad a_0 + \overline{a_1a_2a_3} + \overline{a_4a_5a_6} + a_7 + \cdots, \\
& \quad \cdots \\
B &= a_0 + \overline{a_1a_2a_3} + \overline{a_4a_5a_6} + \overline{a_7a_8a_9} + \cdots.
\end{aligned}$$

These numbers are increasing by steps of less than 1000. Hence one of them will be at least 10^t and at most $\min\{10^t + 999, B\}$. This will be the first step for Susan, arriving at a number with at most four non-zero digits. By putting a plus sign between every pair of adjacent digits in each subsequent step, Susan obtain a number at most 36 in the second step, a number at most 11 in the third step and a single-digit number on the fourth step.