# Семнадцатый Турнир, 1995-1996

---

СЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1995 г.
**8-9 кл., тренировочный вариант.**
*(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)*

---

**Задача 1.**(3)
На плоскости расположен квадрат, и невидимыми чернилами нанесена точка P. Человек в специальных очках видит точку. Если провести прямую, то он отвечает на вопрос, по какую сторону от неё лежит P (если P лежит на прямой, то он говорит, что P лежит на прямой).
Какое наименьшее число таких вопросов необходимо задать, чтобы узнать, лежит ли точка P внутри квадрата?
*А. Я. Канель-Белов*

**Задача 2.**(3)
Существуют ли 100 натуральных чисел таких, что их сумма равна их наименьшему общему кратному?
(Среди чисел могут быть равные.)
*С. Токарев*

**Задача 3.**(3)
Прямоугольник ABCD площади 1 сложили по прямой так, что точка C совпала с A.
Докажите, что площадь получившегося пятиугольника меньше 3/4.
*Фольклор*

**Задача 4.**(5)
Через вершину A остроугольного треугольника ABC проведены биссектрисы AM и AN внутреннего и внешнего углов и касательная AK к описанной окружности треугольника ABC (точки M, K, N лежат на прямой BC).
Докажите, что MK=KN.
*И. Шарыгин*

СЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 22 октября 1995 г.
**8-9 кл., основной вариант.**
*(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)*

**Задача 1.**(5)
Докажите, что внутри остроугольного треугольника существует такая точка, что основания перпендикуляров, опущенных из неё на стороны, являются вершинами равностороннего треугольника.
*Н. Васильев*

**Задача 2.**(5)
Последовательность определяется так: первые её члены - 1, 2, 3, 4, 5. Далее каждый следующий (начиная с 6-го) равен произведению всех предыдущих членов минус 1.
Докажите, что сумма квадратов первых 70 членов последовательности равна их произведению.
*Л. Курляндчик*

**Задача 3.**(5)
AK - биссектриса треугольника ABC, P и Q - точки на двух других биссектрисах (или их продолжениях) такие, что PA=PK, QA=QK.
Докажите, что $\angle PAQ = 90^\circ - (1/2)\angle A$.
*Фольклор*

**Задача 4.**(3+3)
В компанию из N человек пришел журналист. Ему известно, что в этой компании есть человек Z, который знает всех остальных членов компании, но его не знает никто. Журналист может к каждому члену компании обратиться с вопросом: "Знаете ли вы такого-то?"
**а)**(3) Может ли журналист установить, кто из компании есть Z, задав меньше, чем N таких вопросов?
**б)**(3) Найдите наименьшее количество вопросов, достаточное для того, чтобы наверняка найти Z, и докажите, что меньшим числом вопросов обойтись нельзя.
(Все отвечают на вопросы правдиво. Одному человеку можно задавать несколько вопросов.)
*Г. Гальперин*

**Задача 5.**(5+2)
**а)**(2) Существуют ли два равных семиугольника, все вершины которых совпадают, но никакие стороны не совпадают?
**б)**(5) А три таких семиугольника?
(Напоминание: многоугольник на плоскости ограничен несамопересекающейся замкнутой ломаной.)
*В. Произволов*

**Задача 6.**(4+5)
Есть доска 1*1000, вначале пустая, и куча из n фишек. Двое ходят по очереди. Первый своим ходом "выставляет" на доску не более 17 фишек по одной на любое свободное поле (он может взять все 17 из кучи, а может часть - из кучи, а часть - переставить на доске). Второй снимает с доски любую серию фишек (серия - это несколько фишек, стоящих подряд, то есть без свободных полей между ними), и кладёт их обратно в кучу. Первый выигрывает, если ему удастся выставить все(!) фишки в ряд без пробелов.
**а)**(4) Докажите, что при n=98 первый всегда может выиграть.
**б)**(5) При каком наибольшем n первый всегда может выиграть?
*А. Шаповалов*

СЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1995 г.
**10-11 кл., тренировочный вариант.**
*(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)*

---

**Задача 1.**(3)
На плоскости расположен квадрат, и невидимыми чернилами нанесена точка P. Человек в специальных очках видит точку. Если провести прямую, то он отвечает на вопрос, по какую сторону от неё лежит P (если P лежит на прямой, то он говорит, что P лежит на прямой).
Какое наименьшее число таких вопросов необходимо задать, чтобы узнать, лежит ли точка P внутри квадрата?
*Фольклор*

**Задача 2.**(2+2)
**а)**(2) Существуют ли четыре таких различных натуральных числа, что сумма любых трёх из них есть простое число?
**б)**(2) Существуют ли пять таких различных натуральных чисел, что сумма любых трёх из них есть простое число?
*В. Сендеров*

**Задача 3.**(3)
Шестизначное число начинается с цифры 5.
Верно ли, что к нему всегда можно приписать справа 6 цифр так, чтобы получился полный квадрат?
*А. Толпыго*

**Задача 4.**(5)
На плоскости даны три точки A, B, C.
Через точку C проведите прямую так, чтобы произведение расстояний от этой прямой до A и B было максимальным. Всегда ли такая прямая единственна?
*Н. Васильев*

СЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 22 октября 1995 г.
**10-11 кл., основной вариант.**
*(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)*

---

**Задача 1.**(3+2)
Внутри выпуклого четырехугольника ABCD расположена точка P. Строятся биссектрисы PK, PL, PM и PN углов APB, BPC, CPD и DPA соответственно.
**а)**(3) Найдите хотя бы одну такую точку P, при которой четырёхугольник KLMN - параллелограмм.
**б)**(2) Найдите все такие точки.
*С. Токарев*

**Задача 2.**(5)
Дано n чисел, p - их произведение. Разность между p и каждым из этих чисел - нечётное целое число. Докажите, что все данные n чисел иррациональны.
*Г. Гальперин*

**Задача 3.**(5)
Прямоугольник разбит на прямоугольные треугольники, граничащие друг с другом только по целым сторонам, так, что общая сторона двух треугольников всегда служит катетом одного и гипотенузой другого.
Докажите, что отношение большей стороны прямоугольника к меньшей не менее 2.
*А. Шаповалов*

**Задача 4.**(6)
Кресла для зрителей вдоль лыжной трассы занумерованы по порядку: 1, 2, 3, ..., 1000. Кассирша продала n билетов на все первые 100 мест, но n больше 100, так как на некоторые места она продала больше одного билета (при этом n<1000). Зрители входят на трассу по одному.Каждый, подойдя к своему месту, занимает его, если оно свободно, если же занято, говорит "Ох!", идёт в сторону роста номеров до первого свободного места и занимает его. Каждый раз, обнаружив очередное место занятым, он говорит "Ох!".
Докажите, что все рассядутся и что число "охов" не зависит от того, в каком порядке зрители выходят на трассу.
*А. Шень*

**Задача 5.**(7)
На берегу круглого озера растут 6 сосен. Известно, что если взять такие два треугольника, что вершины одного совпадают с тремя из сосен, а вершины другого - с тремя другими, то в середине отрезка, соединяющего точки пересечения высот этих треугольников, на дне озера находится клад. Неизвестно только, как нужно разбить данные шесть точек на две тройки.
Сколько раз придётся опуститься на дно озера, чтобы наверняка отыскать клад?
*С. Маркелов*

**Задача 6.**(3+4+2)
Существует ли возрастающая арифметическая прогрессия
**а)**(3) из 11,
**б)**(4) из 10000,
**в)**(2) из бесконечного числа натуральных чисел,
такая что последовательность сумм цифр её членов - также возрастающая арифметическая прогрессия?
*А. Шаповалов*

СЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1996 г.
**8-9 кл., тренировочный вариант.**
*(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)*

---

**Задача 1.**(2)
Наибольший угол остроугольного треугольника в пять раз больше наименьшего.
Найдите углы этого треугольника, если известно, что все они выражаются целым числом градусов.
*Г. Гальперин*

**Задача 2.**(2+2)
Существует ли число n такое, что числа
**а)**(2) n-96, n, n+96;
**б)**(2) n-1996, n, n+1996
простые? (Все простые числа положительные.)
*В. Сендеров*

**Задача 3.**(4)
Под каким углом видна из вершины прямого угла прямоугольного треугольника проекция на гипотенузу вписанной окружности?
*М. Евдокимов*

**Задача 4.**(3+3)
Рассматриваются всевозможные шестизвенные замкнутые ломаные, все вершины которых лежат на окружности.
**а)**(3) Нарисуйте такую ломаную, которая имеет наибольшее возможное число точек самопересечения.
**б)**(3) Докажите, что большего числа самопересечений такая ломаная не может иметь.
*Н. Васильев*

**Задача 5.**(3+3)
Двое играют в крестики-нолики на доске 10*10 по следующим правилам. Сначала они заполняют крестиками и ноликами всю доску, ставя их по очереди (начинающий игру ставит крестики, его партнер - нолики). Затем подсчитываются два числа: К - число пятерок подряд стоящих крестиков и, аналогично, Н - число пятерок подряд стоящих ноликов. (Считаются пятерки, стоящие по горизонтали, по вертикали и параллельно диагонали; если подряд стоят шесть крестиков, то это даёт две пятерки, если семь, то три и т. д.) Число К-Н считается выигрышем первого игрока (проигрышем второго).
**а)**(3) Существует ли у первого игрока беспроигрышная стратегия?
**б)**(3) Существует ли у него выигрышная стратегия?
(Стратегия - это алгоритм игры, приводящий к цели при любой игре противника.)
*А. Канель-Белов*

СЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 3 марта 1996 г.
**8-9 кл., основной вариант.**
*(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)*

---

**Задача 1.**(3)
Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2+b^2-ab=c^2$.
Докажите, что $(a-c)(b-c)\leq 0$.
*А. Егоров*

**Задача 2.**(3)
Заданы две непересекающиеся окружности с центрами $O_1$ и $O_2$ и их общая внешняя касательная, касающаяся окружностей соответственно в точках $A_1$ и $A_2$. Пусть $B_1$ и $B_2$ - точки пересечения отрезка $O_1O_2$ с соответствующими окружностями, а C - точка пересечения прямых $A_1B_1$ и $A_1B_1$. Докажите, что прямая, проведенная через точку C перпендикулярно $B_1B_2$, делит отрезок $A_1A_2$ пополам.
*Фольклор*

**Задача 3.**(3)
В ряд выписаны действительные числа $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., $a_{1996}$.
Докажите, что можно выделить одно или несколько стоящих рядом чисел так, что их сумма будет отличаться от целого числа меньше, чем на 0,001.
*А. Канель-Белов*

**Задача 4.**(5)
В углу прямоугольной клетчатой доски размером m*n стоит ладья. Двое поочередно передвигают её по вертикали или по горизонтали на любое число полей; при этом не разрешается, чтобы ладья стала на поле или прошла через поле, на котором она уже побывала (или через которое уже проходила). Проигравшим считается тот, кому некуда ходить. Кто из играющих может обеспечить себе победу: начинающий или его партнер, и как ему следует играть?
*Б. Бегун*

**Задача 5.**(3+3)
**а)**(3) 8 учеников решали 8 задач. Оказалось, что каждую задачу решили 5 учеников.
Докажите, что найдутся такие два ученика, что каждую задачу решил хотя бы один из них.
**б)**(3) Если каждую задачу решило 4 ученика, то может оказаться, что таких двоих не найдётся.
Докажите это.
*С. Токарев*

**Задача 6.**(3+5)
В равностороннем треугольнике ABC на стороне AB взята точка D так, что AD=AB/n.
Докажите,что сумма n-1 углов, под которыми виден отрезок AD из точек, делящих сторону BC на n равных частей, равна $30^o$:
**а)**(3) при n = 3;
**б)**(5) при произвольном n.
*В. Произволов*

СЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1996 г.
**10-11 кл., тренировочный вариант.**
*(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)*

---

**Задача 1.**(3)
Сто человек ответили на вопрос: "Будет ли новый президент лучше прежнего?" Из них a человек считают, что будет лучше, b - что будет такой же, и c - что будет хуже. Социологи построили два показателя "оптимизма" опрошенных: $m=a+b/2$ и $n=a-c$. Оказалось, что $m=40$.
Найдите n.
*А. Ковальджи*

**Задача 2.**(3)
Девять цифр: 1, 2, 3, ..., 9 выписаны в некотором порядке (так что получилось 9-значное число). Рассмотрим все тройки цифр, идущих подряд, и найдём сумму соответствующих семи трехзначных чисел.
Каково наибольшее возможное значение этой суммы?
*А. Галочкин*

**Задача 3.**(4)
Рассмотрим произведение ста сомножителей: 1!, 2!, 3!, ..., 100!.
Можно ли выбросить один из этих сомножителей, чтобы произведение оставшихся было полным квадратом?
(Через n! обозначается произведение 1*2*3*...*n.)
*С. Токарев*

**Задача 4.**(4)
Можно ли разбить все пространство на правильные тетраэдры и правильные октаэдры? (Грани этих многогранников - правильные треугольники; у тетраэдра их 4, у октаэдра - 8.)
*А. Канель-Белов*

**Задача 5.**(5)
На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты ABMN, BCKL, ACPQ. На отрезках NQ и PK построены квадраты NQZT и PKXY. Разность площадей квадратов ABMN и BCKL равна d.
Найдите разность площадей квадратов NQZT и PKXY
**а)**(3) в случае, если угол ABC прямой,
**б)**(2) в общем случае.
*А. Герко*

СЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 3 марта 1996 г.
**10-11 кл., основной вариант.**
*(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)*

---

**Задача 1.**(4)
Существует ли в пространстве куб, расстояния от вершин которого до данной плоскости равны 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?
*В. Произволов*

**Задача 2.**
Кузнечик вначале сидит в точке M плоскости 0xy вне квадрата $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$ (координаты M - нецелые, расстояние от M до центра квадрата равно d). Кузнечик прыгает в точку, симметричную M относительно самой правой (с точки зрения кузнечика) вершины квадрата.
Докажите, что за несколько таких прыжков кузнечик не сможет удалиться от центра квадрата более чем на 10d.
*А. Канель-Белов*

**Задача 3.**(3+4)
В равнобедренном треугольнике ABC (AB=AC) угол A равен $\alpha$. На стороне AB взята точка D так, что AD=AB/n.
Найдите сумму n-1 углов, под которыми виден отрезок AD из точек, делящих сторону BC на n равных частей:
**а)**(3) при n = 3;
**б)**(4) при произвольном n.
*В. Произволов*

**Задача 4.**(6)
В некотором государстве человек может быть зачислен в полицию только в том случае, если он выше ростом, чем 80% (или больше) его соседей. Чтобы доказать свое право на зачисление в полицию, человек сам называет число R (радиус), после чего его "соседями" считаются все, кто живёт на расстоянии меньше R от него (число соседей, разумеется, должно быть не нулевое). В этом же государстве человек освобождается от службы в армии только в том случае, если он ниже ростом, чем 80% (или больше) его соседей. Определение "соседей" аналогично; человек сам называет число r (радиус) и т. д., причём R и r не обязательно совпадают. Может ли случиться, что не менее 90% населения имеют право на зачисление в полицию и одновременно не менее 90% населения освобождены от армии?
(Каждый человек проживает в определенной точке плоскости.)
*Н. Константинов*

**Задача 5.**(3+5)
Докажите, что существует бесконечно много троек чисел n-1, n, n+1 таких, что:
**а)**(3) n представимо в виде суммы двух квадратов натуральных (целых положительных) чисел, а n-1 и n+1 - нет;
**б)**(5) каждое из трёх чисел представимо в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.
*В. Сендеров*

**Задача 6.**(4+5)
В таблице из n столбцов и $2^n$ строк, в которых выписаны все возможные различные наборы из n чисел 1 и -1, некоторые числа заменены нулями.
Докажите, что можно выбрать некоторое непустое подмножество строк так, что:
**а)** сумма всех чисел в выбранных строках равна 0;
**б)** сумма всех выбранных строк есть нулевая строка.
(Строки складываются покоординатно как векторы.)
*Г. Кондаков, В. Черноруцкий*

# Седамнаести турнир градова
# јесењи циклус октобар–новембар 1995.
# 8–9 разред (8. разред основне и I разред средње школе)

**Радна варијанта:**

## ЗАДАЦИ

**1.** Доказати да унутар оштроуглог троугла постоји таква тачка да подножја нормала повучених из те тачке на странице троугла представљају темена једнакостраничног троугла.

**2.** Низ је дефинисан на следећи начин: његови први чланови су 1, 2, 3, 4, 5. Даље је сваки следећи (почевши од 6–тог) једнак производу свих предходних чланова минус 1. Докажите да је збир квадрата првих 70 чланова низа једнак њиховом производу.

**3.** $AK$ је бисектриса троугла $ABC$, а тачке $P$ и $Q$ на другим двема бисектрисама (или њиховим продужецима) су такве, да је
$PA = PK$, $QA = QK$.

Доказати да је $\angle PAQ = 90° - \frac{1}{2}\angle A$.

4. У групу од $N$ људи дошао је новинар. Он зна да је у тој групи човек $Z$ који познаје све остале чланове групе али њега не зна нико. Новинар може сваком члану групе да се обрати са питањем *"Познајете ли тога и тога?"*

а) Може ли новинар установити ко је човек $Z$, задавши мање од $N$ таквих питања?

б) Наћи најмањи број питања довољан да би се са сигурношћу открио $Z$ и доказати да се са мањим бројем то не може учинити.

(Сви на питања одговарају искрено. Једном човеку се може задати више питања.)

5. а) Постоје ли два седмоугла једнаких површина чија се сва темена поклапају, али им се ниједан пар страница не поклапа?

б) Постоје ли три таква седмоугла?

(*Напомена:* Многоугао у равни је ограничен затвореном несамопресецајућом полигоналном линијом.)

6. Дата је табела $1 \times 1000$, у почетку празна, и гомила од $n$ жетона. Двоје играју редом. Први поставља на таблу не више од 17 жетона одједном на било које слободно поље (он може узети свих 17 са гомиле, а може део са гомиле а део да премести са плоче). Други скида са табле било коју серију жетона (серија – неколико заредом поређаних жетона без празних поља између), и слаже их назад на гомилу. Први побеђује ако успе да постави све жетоне у низ без прекида.

а) Доказати да за $n = 98$ први увек може да победи.

б) За које највеће $n$ први увек може да победи?

## Седамнаести турнир градова
## 10–11 разред (II, III, IV разред средње школе)

**Радна варијанта:**

## ЗАДАЦИ

1. У унутрашњости конвексног четвороугла $ABCD$ налази се тачка $P$. Конструишу се бисектрисе $AK$, $AL$, $AM$ и $AN$ углова $APB$, $BPC$, $CPD$ и $DPA$ респективно.

а) Наћи барем једну тачку $P$, за коју је четвороугао $KLMN$ – паралелограм.

б) Наћи све такве тачке.

**2.** Дато је $n$ бројева, $p$ је њихов производ. Разлика између $p$ и сваког од тих бројева је непаран цео број. Доказати да су свих $n$ бројева ирационални.

**3.** Правоугаоник је разбијен на правоугле троуглове, који се граниче један са другим само дуж целих страница, тако да заједничка страница два троугла увек мора бити катета једног и хипотенуза другог троугла. Докажите да је однос веће странице правоугаоника према мањој не мањи од 2.

**4.** Седишта за гледаоце дуж скијашке стазе су нумерисана редом: 1, 2, 3,..., 1000. Благајница је продала $n$ карата за првих 100 места, али $n$ је веће од 100, јер је за нека места продала више од једне карте (при чему је $n < 1000$). Гледаоци излазе на стазу један по један. Сваки, пришавши своме месту, заузима место ако је слободно, а ако је заузето каже *"Ох"* и иде у смеру раста бројева до првог слободног седишта и заузима га. Сваки пут откривши да је и следеће место заузето он говори *"Ох"*. Докажите да ће сви поседати и да број *"Ох"-ова* не зависи од тога у ком поретку гледаоци излазе на стазу.

**5.** На обали округлог језера расте 6 јела. Познато је, да ако се узму таква два троугла, да се темена једног поклапају са трима јелама, а темена другог са другим трима јелама, онда се у средини одсечка који спаја ортоцентре та два троугла, на дну језера налази благо. Не зна се само како треба разбити датих шест тачака на две тројке. Колико се највише пута мора спустити на дно језера да би се сигурно извукло благо?

**6.** Постоји ли растућа геометријска прогресија са

а) 11,

б) 10000,

в) бесконачно много природних бројева,

таква да низ збирова цифара њених чланова такође представља растућу геометријску прогресију?

# Турнир градова (8–9 разред)

**Основна варијанта**

1. Нека унутар нашег троугла $ABC$ постоји таква тачка $Q$, о којој се говори у задатку. Означимо са $M, N, P$ подножја нормала повучених из $Q$ на странице ($M \in AB$, $N \in BC$, $P \in CA$). $\angle MQP = \pi - \angle BAC$, $\angle NQM = \pi - \angle CBA$, $\angle PQN = \pi - \angle ACB$ Како су унутрашњи углови троугла оштри (по услову задатка) следи да су углови $\angle MQP$, $\angle NQM$, $\angle PQN$ тупи, при чему им је сума $2\pi$. Троугао $MNP$, по претпоставци треба да је једнакостраничан.

   Посматрајмо сада произвољан једнакостраничан троугао $XYZ$ и нађимо у њему тачку $O$ такву да углови $\angle XOY$, $\angle YOZ$, $\angle ZOX$ имају вредност једнаку угловима $\angle MQP$, $\angle NQM$, $\angle PQN$ респективно.

   У полуравни у односу на $XY$, у којој није тачка $Z$, одредимо произвољну тачку $V$ такву, да је $\angle XVY = \angle BAC$. опишимо кружницу $K$ око троугла $XVY$. Тада је из сваке тачке лука $XmY$, те кружнице, који је у односу на праву $XY$ са супротне стране од тачке $V$, дуж$XY$ видљива под углом $\angle MQP = \pi - \angle BAC$. Конструишимо, аналогно кружне луке $YnZ$ и $ZpX$, из чијих се тачака дужи $YZ$ и $ZX$ виде под угловима $\angle NQM$, $\angle PQN$ респективно.

Свака два од три тако конструисана лука се пресецају. Доказаћемо да се пресецају луци $XmY$ и $YnZ$. Поставимо кроз тачку $Y$ тангенте $t_1$ и $t_2$ на луке $XmY$ и $YnZ$. Оштар угао између $t_1$ и тетиве $XY$ означимо са $\alpha$, а оштар угао између $t_2$ и $YZ$ са $\beta$. $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$. $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$ јер је $\angle ACB$ – оштар, па је $\alpha + \beta > \frac{\pi}{3}$. Осим тога, $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $\beta < \frac{\pi}{2}$. Из тог следи, да се луци $XmY$ и $YnZ$ секу у некој тачки $O$ унутар угла $YXZ$. Кроз ту тачку пролази и лук $ZpX$ због услова да је збир углова $\angle MQP + \angle NQM + \angle PQN = 2\pi$.

Значи, постоји само једна тачка $O$ из које се све дужи виде под задатим угловима. Дакле израда задатака би текла овим током. Кроз тачке $X, Y$ и $Z$ поставићемо праве нормалне на $OX$, $OY$, $OZ$. Теме пресека тих правих су тачке троугла $A'B'C'$ сличног датом троуглу $ABC$. Сада ћемо видети у ком односу тачке $X$, $Y$ и $Z$ деле странице троугла $A'B'C'$. Разделићемо странице $\triangle ABC$ у истом односу; тачке које деле странице $\triangle ABC$ у тражене тачке $M, N, P$.

2. Означимо са $a_n$ – $n$-ти члан низа; са $S_n$ – збир квадшрата првих $n$ чланова низа, са $P_n$ производ првих $n$ чланова. $S_5 = 55$, $P_5 = 120$. Посматрајмо разлику $D_n = P_n - S_n$, при $n > 4$. $D_{n+1} - D_n = P_{n+1} - P_n - S_{n+1} + S_n = P_n(a_{n+1} - 1) - a_{n+1}^2 = P_n(P_n - 2) - (P_n - 1)^2 = P_n^2 - 2P_n - P_n^2 + 2P_n - 1 = -1$. Дакле, ако се $n$ увећа за 1, $D_n$ се смањи за 1. Значи, за $n = 70$ разлика је 0, што значи $S_{70} = P_{70}$.

3. Две бисектрисе троугла не могу бити ни паралелне ни нормалне (збир два угла троугла је увек мањи од 180°). Зато тачке $P$ и $Q$ увек постоје и одређене су једнозначно. Нека је $P$ тачка бисектрисе $\angle B$, $Q$–тачка бисектрисе $\angle C$.

   Опишемо кружницу око $\triangle ABK$. Посматрајмо лук $AmK$ те кружнице, који не садржи тачку $B$. Средине $P'$ тог лука једнако је удаљена од тачака $A$ и $K$, а одсечак $BP$ дели $\angle CBA$ на два једнака дела. Значи тачка $P'$ задовољава све услове који одређују тачку $P$ те је $P' \equiv P$.

   $\angle PAK = \angle PBK$ (периферијски углови над истим луком).

   $\angle PBK = \angle ABC/2$ (јер је $BK$–бисектриса). Значи,
   $\angle PAK = \angle ABC/2$.

   Аналогно, ако опишемо кружницу око троугла $ACK$, доказујемо да је $\angle QAK = \angle \frac{ACB}{2}$

   Па је тражени угао $\angle PAQ = \angle PAK + \angle KAQ = \frac{\angle B + \angle C}{2} = \frac{\pi - \angle A}{2}$ што је и требало доказати.

4. а) Одговор је – може.

   Ево пример система питања, који доводи до одговора. У почетку новинар бира произвољне чланове А и Б те групе. Човеку А поставља питање: "Знате ли ви ко је Б?" Из одговора "Да" следи Б није $Z$. (Пошто $Z$ не зна нико). Из одговора "Не" следи А није $Z$ (јер $Z$ познаје све). Значи, једно питање је задато и један човек је елиминисан – даље не треба задавати питања ни њему, нити питати за њега. Дакле сада је у групи од $N-1$, $Z$ кога тражимо то јест који познаје све, а њега не зна нико. Настављајући тако можемо одбацити $N-1$ човека задавши $N-1$ питање. Остаје један човек који би био $Z$. До њега смо дошли задавши $N-1$ питање.

   б) Предпоставимо да постоји систем питања који води решењу. Том систему питања једнозначно придружујемо граф чијих $N$ чворова су људи из те групе на следећи начин. Два чвора $A$ и $B$, који одговарају неким људима, су повезана граном ако и само ако је било постављено питање да ли $A$ познаје $B$ или да ли$B$ познаје $A$. Очевидно је да ако је тај граф повезан, тада број грана није мањи од $N-1$. Ако граф има $m$ компоненти повезаности од којих свака има $k_1, k_2, \ldots,, k_m$, елемената тј. $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = N$, тада пошто не знамо да ли се $Z$ налази у $i$-тој компоненти, број питања којим утврђујемо да лице $Z$ није у $i$-тој компоненти не може бити мањи од $k_i$ па укупни број питања за откривање лица $Z$ не може бити мањи од $k_1+k_2+\ldots+k_m-1 = N-1$

5. Одговор под а) и б) – да.

   Тражене седмоугле конструишемо на следећи начин:

   Конструишемо правилан (једнакостраничан) $\triangle ABC$ са центром O. Применимо на $\triangle ABC$ хомотетију са центром O и коефицијентом $\frac{1}{2}$. Ротирајмо добијени троугао за угао $-1°$ ; добијени троугао означимо са $A'B'C'$. Сада имамо седмоугао $AOC'A'CB'B$. Лако се види да је затворена полигонална линија $AOC'A'CB'BA$ без тачака самопресецања, дакле, образује седмоугао. Можемо добити још два решења ако заротирамо хомотетичну слику троугла $ABC$ за угао $-60°$ и $-120°$. Та три седмоугла задовољавају услове задатка.

6. а) Први у почетку у неколико корака поставља 12 серија по 8 жетона, раздељујући суседне серије једном празнином. Затим успоставља конфигурацију, после игре другог, 17, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 17. При произвољној игри другог у следећем кораку он образује непрекидни низ. Ако други скине једну од средњих серија, други је поново поставља а затим премешта 9 жетона у празнине између серија

   б) 98 је највеће $n$, за које први увек побеђује.