Шестнадцатый Турнир, 1994-1995

Осенний тур

Тренировочный вариант

(8-9 кл., 16, осень)
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Во время бала каждый юноша танцевал вальс с девушкой либо более красивой, чем на предыдущем танце, либо более умной, а один - с девушкой одновременно более красивой и более умной. Могло ли такое быть? (Юношей и девушек на балу было поровну.)
А.Я. Канель-Белов

Задача 2.(3)
На плоскости даны две окружности одна внутри другой. Построить такую точку O, что одна окружность получается из другой гомотетией относительно точки O (другими словами - чтобы растяжение плоскости от точки O с некоторым коэффициентом переводило одну окружность в другую).
Фольклор

Задача 3.(5)

Найдите какие-нибудь пять натуральных чисел, разность любых двух из которых равна наибольшему общему делителю этой пары чисел.
С.И. Токарев

Задача 4.(5)
В Простоквашинской начальной школе учится всего 20 детей. У любых двух из них есть общий дед. Докажите, что у одного из дедов в этой школе учится не менее 14 внуков и внучек.
А.В. Шаповалов

Осенний тур

Основной вариант

(8-9 кл., 16, осень, 23.11.1994)

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
В ящиках лежат орехи. Известно, что в среднем в каждом ящике 10 орехов, а среднее арифметическое квадратов чисел орехов в ящиках меньше 1000.
Докажите, что по крайней мере 10% ящиков не пустые.
А.Я. Канель-Белов

Задача 2.(4)
На плоскости дан квадрат 8*8, разбитый на клеточки 1*1. Его покрывают прямоугольными равнобедренными треугольниками (два треугольника закрывают одну клетку). Имеется 64 черных и 64 белых треугольника. Рассматриваются "правильные" покрытия - такие, что любые два треугольника, имеющие общую сторону, разного цвета. Сколько существует правильных покрытий?
Н.Б. Васильев

Задача 3.(4)
Взаимно перпендикулярные прямые l и m пересекаются в точке P окружности так, что они разбивают окружность на три дуги. Отметим на каждой дуге точку такую, что проведенная через неё касательная к окружности пересекается с прямыми l и m в точках, равноотстоящих от точки касания. Докажите, что три отмеченные точки являются вершинами равностороннего треугольника.
Е. Пржевальский

Задача 4.
Можно ли из последовательности 1, 1/2, 1/3, ... выбрать (сохраняя порядок)
а)(3) сто чисел,
б)(2) бесконечную подпоследовательность чисел,
из которых каждое, начиная с третьего, равно разности двух предыдущих ($a_k=a_{k-2}-a_{k-1}$)?
С. Токарев

Задача 5.(6)
Периоды двух последовательностей - 7 и 13. Какова максимальная длина начального куска, который может у них совпадать? (Период последовательности $\{a_n\}$ - это наименьшее натуральное число p, такое что для любого номера n выполняется равенство $a_n=a_{n+p}$).
А. Канель-Белов

Задача 6.(6)
Сумма шестых степеней шести целых чисел на единицу больше, чем их ушестерённое произведение. Докажите, что одно из чисел равно единице или минус единице, а остальные - нули.
Л. Курляндчик

Задача 7.(9)
Фигура Ф представляет собой пересечение N кругов (радиусы не обязательно одинаковы). Какое максимальное число криволинейных "сторон" может иметь фигура Ф? (Криволинейная сторон - это участок границы Ф, принадлежащий одной из окружностей и ограниченный точками пересечения с другими окружностями.)
Н. Бродский

Осенний тур

Тренировочный вариант

(10-11 кл., 16, осень)

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)

Во время бала каждый юноша танцевал вальс с девушкой либо более красивой, чем на предыдущем танце, либо более умной, но большинство (не меньше 80 процентов) - с девушкой одновременно более красивой и более умной. Могло ли такое быть? (Юношей и девушек на балу было поровну.)

А.Я. Канель-Белов

Задача 2.(4)

Докажите, что из шести ребер тетраэдра можно сложить два треугольника.

В.В. Произволов

Задача 3.(4)

Пусть a, b, c, d - вещественные числа, такие что $a^3+b^3+c^3+d^3=a+b+c+d=0$.

Докажите, что сумма каких-то двух из этих чисел равна нулю.

Л.Д. Курляндчик

Задача 4.(5)

Полоска 1*10 разбита на единичные квадраты. В квадраты записывают числа 1, 2, ..., 10. Сначала в один какой-нибудь квадрат пишут число 1, затем число 2 записывают в один из соседних квадратов, затем число 3 - в один из соседних с уже занятыми и т. д. (произвольными являются выбор первого квадрата и выбор соседа на каждом шагу). Сколькими способами это можно проделать?

А. Шень

Осенний тур

Основной вариант

(10-11 кл., 16, осень, 23.10.1994)

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Коэффициенты квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ изменили не больше, чем на 0,001. Может ли больший корень уравнения измениться больше, чем на 1000?
Фольклор

Задача 2.
Покажите, как разбить пространство
а)(2) на одинаковые тетраэдры,
б)(2) на одинаковые равногранные тетраэдры
(тетраэдр называется равногранным, если все его грани - равные треугольники).
Н. Б. Васильев

Задача 3.(4)
В треугольник ABC вписана окружность с центром O. Медиана AD пересекает её в точках X и Y. Найдите угол $\angle XOY$, если AC=AB+AD.
А. Федотов

Задача 4.(5)
Докажите, что для любых положительных чисел $a_1, ..., a_n$ справедливо неравенство
$(1+(a_1^2/a_2))\,(1+(a_2^2/a_3))\,...\,(1+(a_n^2/a_1)) \geq (1+a_1)\,(1+a_2)\,...\,(1+a_n)$
Л.Д. Курляндчик

Задача 5.(6)
Периоды двух последовательностей - m и n - взаимно простые числа. Какова максимальная длина начального куска, который может у них совпадать?
(Период последовательности $\{a_i\}$ - это наименьшее натуральное число p, такое что для любого номера k выполняется равенство $a_k=a_{k+p}$.)
А.Я Канель-Белов

Задача 6.(7)
Рассматривается последовательность, n-ый член которой есть первая цифра числа 2^n.
Докажите, что количество различных "слов" длины 13 - наборов из 13 подряд идущих цифр - равно 57.
А. Канель-Белов

Задача 7.(8)
Фигура Ф представляет собой пересечение n кругов (радиусы не обязательно одинаковы). Какое максимальное число криволинейных "сторон" может иметь фигура Ф? (Криволинейная сторона - это участок границы Ф, принадлежащий одной из окружностей и ограниченный точками пересечения с другими окружностями.)
Н. Бродский

Весенний тур

Тренировочный вариант

(8-9 кл., 16, весна)
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(3)
У кассира было 30 монет: 10, 15 и 20 копеек на сумму 5 рублей.
Докажите, что 20-копеечных монет у него было больше, чем 10-копеечных.
Фольклор

Задача 2.(3)
Три кузнечика сидят на прямой так, что два крайних отстоят на 1 м от среднего. Каждую секунду один из кузнечиков прыгает через другого в симметричную точку (если A прыгает через B в точку A_1, то $AB=BA_1$). Через некоторое время кузнечики оказались на тех же местах, что и вначале, но в другом порядке.
Докажите, что поменялись местами крайние кузнечики.
А. Ковальджи

Задача 3.(4)
Известно, что вершины квадрата T_1 принадлежат прямым, содержащим стороны квадрата T_2, а вписанная окружность квадрата T_1 совпадает с описанной окружностью квадрата T_2.
Найдите углы восьмиугольника, образованного вершинами квадрата T_2 и точками касания окружности со сторонами квадрата T_1, и величины дуг, на которые вершины восьмиугольника делят окружность.
С. Маркелов

Задача 4.
Докажите, что число 40...09 - не полный квадрат (при любом числе нулей, начиная с 1).
В. Сендеров

Весенний тур

Основной вариант

(8-9 кл., 16, весна, 12.03.1995)
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(4)
Докажите, что если a, b, c - целые числа, и, кроме того,
(a/b) + (b/c) + (c/a) и (a/c) + (c/b) + (b/a) - также целые числа, то |a|=|b|=|c|.
А. Грибалко

Задача 2.(4)
Прямая отрезает от правильного 10-угольника ABCDEFGHIJ со стороной 1 треугольник PAQ, в котором PA+AQ=1.
Найдите сумму углов, под которыми виден отрезок PQ из вершин B, C, D, E, F, G, H, I, J.
В. Произволов

Задача 3.(4)
Дан равносторонний треугольник ABC. Найти геометрическое место точек P таких, что отрезки прямых AP и BP, лежащие внутри треугольника, равны.
Фольклор

Задача 4.(5)
Может ли быть простым число a+b+c+d, если a, b, c и d - целые положительные числа и ab=cd?
Фольклор

Задача 5.(8)
Есть 4 равных прямоугольных треугольника. Разрешается любой разрезать на два по высоте, опущенной на гипотенузу. С полученными треугольниками можно повторять эту операцию.
Докажите, что после любого числа таких операций среди треугольников найдутся равные.
А.В. Шаповалов

Задача 6.(8)
Может ли случиться, что 6 попарно непересекающихся параллелепипедов расположены в пространстве так, что из некоторой им не принадлежащей точки пространства не видно ни одной из их вершин? (Параллелепипеды непрозрачны.)
В. Произволов, С. Маркелов, А. Я. Канель-Белов

Задача 7.
Геологи взяли в экспедицию 80 банок консервов, веса которых все известны и различны (имеется список). Через некоторое время надписи на консервах стали нечитаемыми, и только завхоз знает, где что. Он может это всем доказать (то есть обосновать, что в какой банке находится), не вскрывая консервов и пользуясь только сохранившимся списком и двухчашечными весами со стрелкой, показывающей разницу весов.
Докажите, что для этой цели ему
а)(4) достаточно четырёх взвешиваний и
б)(4) недостаточно трёх.
А.К. Толпыго

Весенний тур

Тренировочный вариант

(10-11 кл., 16, весна)

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(3)
На отрезке [0,1] числовой оси расположены четыре точки: a, b, c, d.
Докажите, что найдётся точка x, принадлежащая [0,1], такая, что
$(1/|x-a|)+(1/|x-b|)+(1/|x-c|)+(1/|x-d|)<40$.
Л. Курляндчик

Задача 2.
Четыре кузнечика сидели в вершинах квадрата. Каждую секунду один из кузнечиков прыгает через другого в симметричную точку (если A прыгает через B в точку A_1, то векторы **AB** и $\mathbf{BA_1}$ равны).
Докажите, что три кузнечика не могут оказаться
а)(3) на одной прямой, параллельной стороне квадрата;
б)(3) на одной произвольной прямой.
А. Ковальджи

Задача 3.
Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Прямые AC и BC вторично пересекают описанную окружность треугольника AOB в точках E и K.
Докажите, что прямые OC и EK перпендикулярны.
С. Маркелов

Задача 4.(4)
Докажите, что число a0...09 - не полный квадрат (при любом числе нулей, начиная с одного; a - цифра, отличная от 0).
В. Сендеров

Весенний тур

Основной вариант

(10-11 кл., 16, весна, 12.03.1995)
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(4)
Существует ли такая сфера, на которой имеется ровно одна рациональная точка? (Рациональная точка - точка, у которой все три декартовы координаты - рациональные числа.)
А. Рубин

Задача 2.(4)
При каких n можно раскрасить в три цвета все ребра n-угольной призмы (основания - n-угольники) так, что в каждой вершине сходятся все три цвета и у каждой грани (включая основания) есть стороны всех трёх цветов?
А.В. Шаповалов

Задача 3.(5)
На боковых сторонах трапеции как на диаметрах построены окружности.
Докажите, что все четыре касательные, проведенные к окружностям из точки пересечения диагоналей, равны между собой (если эта точка лежит вне окружностей).
С. Маркелов

Задача 4.(6)
На координатной плоскости отмечены некоторые точки с целыми координатами. Дано, что никакие четыре из них не лежат на одной окружности.
Докажите, что найдётся круг радиуса 1995, в котором не отмечено ни одной точки.
А.В. Шаповалов

Задача 5.
а)(3) Разбейте отрезок [0,1] на черные и белые интервалы так, чтобы для любого многочлена p(x) степени не выше второй сумма приращений p(x) по всем чёрным интервалам равнялась сумме приращений p(x) по всем белым интервалам. (Приращением p(x) по интервалу (a,b) называется число p(b)-p(a)).
б)(4) Удастся ли проделать аналогичную операцию для всех многочленов степени не выше 1995?
Г. В. Кондаков

Задача 6.(8)
Существует ли такой невыпуклый многогранник, что из некоторой точки M, лежащей вне него, не видна ни одна из его вершин? (Многогранник сделан из непрозрачного материала, так что сквозь него ничего не видно.)
А.Я. Канель-Белов, С. Маркелов

Задача 7.(10)
Докажите, что среди 50 человек найдутся двое, у которых чётное число общих знакомых (быть может, 0) среди остальных 48 человек.
С.И. Токарев