

L РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

VI одделение

1. Точките M и N се средини на страните AD и CD на правоаголникот $ABCD$. Колкав процент зафаќа плоштината на триаголникот MBN од плоштината на правоаголникот $ABCD$.

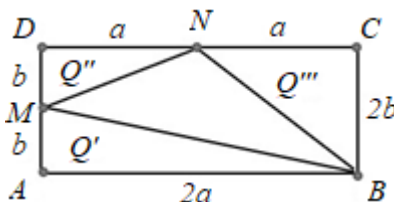
Решение. Да означиме $\overline{AB} = \overline{CD} = 2a$ и $\overline{AD} = \overline{BC} = 2b$, цртеж десно. Тогаш за плоштините Q', Q'', Q''' на триаголниците ABM , MND , BCN добиваме

$$Q' = \frac{2ab}{2}, Q'' = \frac{ab}{2}, Q''' = \frac{2ab}{2},$$

па затоа

$$P_{BNM} = P_{ABCD} - (Q' + Q'' + Q''') = 4ab - \left(\frac{2ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{2ab}{2}\right) = 4ab - \frac{5ab}{2} = \frac{3ab}{2}.$$

Конечно, бараниот процент е $\frac{P_{BNM}}{P_{ABCD}} \cdot 100\% = \frac{\frac{3ab}{2}}{4ab} \cdot 100\% = \frac{300}{8}\% = 37,5\%$.



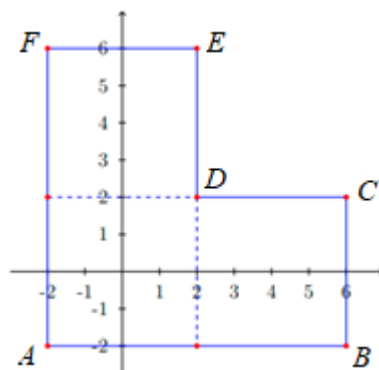
2. Во правоаголен координатен систем во рамнината зададени се точките $A(-2, -2)$, $C(6, 2)$ и $E(2, 6)$. Точката B е симетрична на точката C во однос на x -оската, точката D е симетрична на точката A во однос на правата која минува низ координатниот почеток и низ точката $(-1, 1)$ и точката F е симетрична на точката E во однос на y -оската.

а) Определи ги координатите на точките B , D и F .

б) Поврзи ги во следниот редослед точките A, B, C, D, E, F, A и пресметај ги периметарот и плоштината на така добиената фигура. Единичната должина е еднаква на 1cm .

Решение. а) Координатите на бараните точки се $B(6, -2)$, $D(2, 2)$ и $F(-2, 6)$.

б) Периметарот на добиената фигура е еднаков на периметарот на квадрат со страна $6 - (-2) = 8$, (Зошто?), односно $L = 4 \cdot 8 = 32\text{ cm}$. Плоштината на добиената фигура е еднаква на збирот на плоштините на три квадрати со страна



$$4 \text{ cm}, \text{ т.е. } P = 3 \cdot 4^2 = 48 \text{ cm}^2.$$

3. Колку петцифрени природни броеви запиани со различни цифри постојат, ако во броевите цифрите 5 и 6 се наоѓаат на соседни позиции?

Решение. Ако цифрите 5 и 6 се наоѓаат на местата на десетилјадитите и илјадитите, тогаш броевите се од видот $\overline{56abc}$ или $\overline{65abc}$. Сега цифрата a може да се избере на 8 различни начини, потоа цифрата b на 7 различни начини и цифрата c на 6 различни начини. Значи, во овој случај имаме $2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 672$ броеви.

Ако цифрите 5 и 6 се наоѓаат на местата на илјадитите и стотките, тогаш броевите се од видот $\overline{a56bc}$ или $\overline{a65bc}$. Сега цифрата a може да се избере на 7 различни начини (на првото место не може да е цифрата 0), потоа цифрата b на 7 различни начини и цифрата c на 6 различни начини. Значи, во овој случај имаме $2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 = 588$ броеви.

Аналогно имаме $2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 = 588$ броеви ако цифрите 5 и 6 се наоѓаат на местата на стотките и десетките, или пак на местата на десетките и единиците.

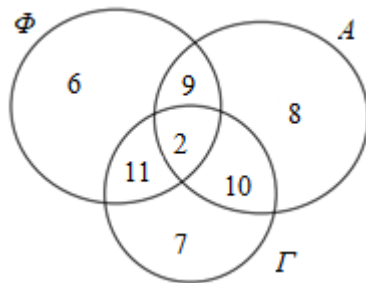
Конечно, имаме вкупно $672 + 3 \cdot 588 = 2436$ броеви со саканото својство.

4. На еден семинар учествувале одреден број на учесници и секој од нив зборува барем еден странски јазик, англиски, германски или француски. Притоа, за учесниците важат и следните услови:

- 2 учесника ги зборуваат сите три јазика,
- 9 учесника зборуваат само француски и англиски јазик,
- 13 учесника зборуваат француски и германски јазик,
- 12 учесника зборуваат германски и англиски јазик,
- 29 учесника зборуваат англиски јазик,
- 6 учесника зборуваат само француски јазик,
- 7 учесника зборуваат само германски јазик.

Опреди ги вкупниот број на учесници на семинарот и бројот на учесници на семинарот кои зборуваат само англиски јазик.

Решение. *Прв начин.* На цртежот десно е прикажан Веновиот дијаграм кој ги задоволува условите на задачата.



Оттука следува дека на семинарот учествувале 8 луѓе кои говореле само англиски, а вкупно имало $6+9+8+11+2+10+7=53$ луѓе.

Втор начин. Нека x е бројот на учесници кои го зборуваат само англискиот јазик. Од тоа што 29 учесници зборуваат англиски јазик, следува дека 29 лица зборуваат англиски јазик и некој друг јазик. Англиски и француски јазик (без германски) зборуваат 9 учесници, англиски и германски јазик (без француски) зборуваат $12-2=10$ учесници и сите три јазици ги зборуваат 2 учесници. Според тоа, добиваме дека $x+9+10+2=29$, односно $x=29-21=8$ учесници зборуваат само англиски јазик. Вкупниот број на учесници на семинарот е еднаков на $6+9+8+11+2+10+7=53$ луѓе.

VII одделение

1. Дадена е допката $\frac{99}{101}$, која е запишана и како децимален број.

а) Најди ја цифрата која стои на 2025-тата позиција по децималната запирка во записот на децималниот број.

б) Определи го n така што $S_n = 2025$, каде S_n е збирот на првите n цифри по децималната запирка на дадената дробка запишана како децимален број.

Решение. Имаме, $\frac{99}{101} = 0,(\overline{9801})$, што значи дека децималниот број е чисто периодичен со периода 9801.

а) Имаме, $2025 = 4 \cdot 506 + 1$, што значи дека 2025-тата цифра по децималната запирка е првата цифра од периодата, т.е. цифрата 9.

б) Збирот на цифрите во периодата е $9+8+0+1=18$. Сега, бидејќи $2025 = 112 \cdot 18 + 9$ за да се добие збир 2025 треба да ги собереме првите 112 периоди и првата цифра од 113-тата периода. Тоа значи дека $n = 4 \cdot 112 + 1 = 449$.

2. Нека a, b, c се различни прости едноцифрени броеви. Определи ги сите броеви од видот $\overline{ab301c}$ кои се деливи со 66.

Решение. Од $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$ следува дека бројот $\overline{ab301c}$ треба да е парен. Последното значи дека $c = 2$, т.е. бројот е $\overline{ab3012}$. Понатаму, од деливоста со 3 следува дека збирот $a+b+3+0+1+2 = a+b+6$ е делив со 3, т.е. збирот $a+b$ е делив со 3. Понатаму, цифрите се различни прости броеви, а како од цифрите 3, 5 и 7 само збирот на 5 и 7 е делив

со 3, добиваме $a, b \in \{5, 7\}$. Значи, можни се броевите 573012 и 753012, па како бројот е делив и со 11, заклучуваме дека единствено решение на задачата е бројот 573012.

3. Две свеќи со различна должина и дебелина чинат 360 денари. Цените на свеќите се во ист однос како и нивните должини. Подолгата свеќа целосно ќе изгори за 3,5 часа од палењето, а пократката за 5 часа од палењето. Ако истовремено се запалат, по два часа горење должините ќе им се изедначат. Определи за колку проценти е подолга едната свеќа од другата и колку чини секоја од нив?

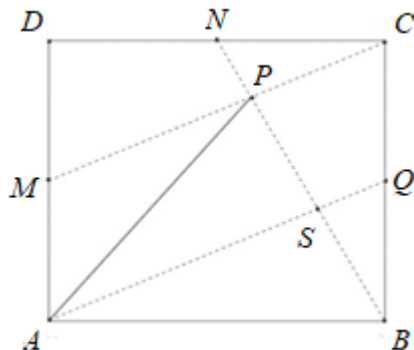
Решение. Со a да ја означиме должината на подолгата, а со b должината на пократката свеќа. Од условот на задачата следува дека од подолгата свеќа за еден час ќе изгори $\frac{a}{3,5} = \frac{2}{7}a$, а од пократката свеќа ќе изгори $\frac{1}{5}b$. По 2 часа горење, од подолгата свеќа ќе остане $a - 2 \cdot \frac{2}{7}a$, а од пократката свеќа ќе остане $b - 2 \cdot \frac{1}{5}b$. Значи, $a - 2 \cdot \frac{2}{7}a = b - 2 \cdot \frac{1}{5}b$, т.е. $\frac{3}{7}a = \frac{3}{5}b$, од каде добиваме $a = \frac{7}{5}b$. Значи, $a = 1,40b$, што значи дека првата свеќа е 40% подолга од втората. Нека x е цената на подолгата, а y е цената на пократката свеќа. Бидејќи цените се однесуваат како и нивните должини, добиваме $x = 1,4y$. Од условот на задачата имаме $x + y = 360$, па затоа $1,4y + y = 360$, т.е. $y = 150$ и затоа $x = 210$.

4. Нека M и N се средини на страните AD и CD , соодветно, на квадратот $ABCD$. Отсечките BN и CM се сечат во точката P . Докажи дека должината на отсечката AP е еднаква со должината на страната на квадратот.

Решение. Правоаголните триаголници BCN и CDM имаат еднакви катети, па затоа тие се складни. Оттука следува $\angle BNC = \angle CMD$ и $\angle CBN = \angle DCM$. Понатаму, од триаголникот CPN имаме

$$\begin{aligned}\angle CNP + \angle PCN &= \angle CMD + \angle PCN \\ &= \angle CMD + \angle MCD \\ &= 90^\circ.\end{aligned}$$

Оттука следува дека $CM \perp BN$.



Нека Q е средина на страната BC . Четириаголникот $AQCM$ е паралелограм, па тогаш правата SQ е средна линија на $\triangle BCP$, а точката S во која се сечат BP и AQ е средина на отсечката BP . Уште повеќе $AQ \perp BP$ па правата AQ е симетрала на отсечката BP . Оттука следува $\overline{AP} = \overline{AB}$.

VIII одделение

1. Докажи дека бројот $1^{2025} + 2^{2025} + 3^{2025} + 4^{2025} + 5^{2025} + 6^{2025} + 9^{2025}$ е делив со 10.

Решение. Имаме:

- $1^{2025} = 1$,
- степените на бројот 2 завршуваат на броевите 2, 4, 8, 6 во овој редослед и како $2025 = 4 \cdot 506 + 1$ бројот 2^{2025} завршува на 2,
- степените на бројот 3 завршуваат на броевите 3, 9, 7, 1 во овој редослед и како $2025 = 4 \cdot 506 + 1$ бројот 3^{2025} завршува на 3,
- степените на бројот 4 завршуваат на броевите 4, 6 во овој редослед и како $2025 = 2 \cdot 1012 + 1$ бројот 4^{2025} завршува на 4,
- степените на бројот 5 завршуваат на бројот 5, па бројот 5^{2025} завршува на 5,
- степените на бројот 6 завршуваат на бројот 6, па бројот 6^{2025} завршува на 6,
- степените на бројот 9 завршуваат на броевите 9, 1 во овој редослед и како $2025 = 2 \cdot 1012 + 1$ бројот 9^{2025} завршува на 9.

Конечно, од $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 9 = 30$ следува дека дадениот број завршува на 0, па затоа тој е делив со 10.

2. Нека $n \geq 1$ е природен број. Докажи дека n и $n+4$ не може да се истовремено точни квадрати.

Решение. Нека $n \geq 1$ е природен број таков што n и $n+4$ се истовремено точни квадрати, т.е. $n = p^2$ и $n+4 = m^2$, за некои $m, p \in \mathbb{N}$. Тогаш $n+4 - n = m^2 - p^2$, т.е. $(m-p)(m+p) = 4$. Броевите $m-p$ и $m+p$ се со иста парност, па како нивниот производ е парен тие се и двата парни. Но, производ на два парни броја е еднаков на 4 ако и двата се еднакви на 2, т.е. $m-p = 2$ и $m+p = 2$. Ако ги собереме последните две равен-

ства добиваме $2m = 4$, т.е. $m = 2$. Значи, $2 + p = 2$, т.е. $p = 0$. Последното противречни на $n \geq 1$. Од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

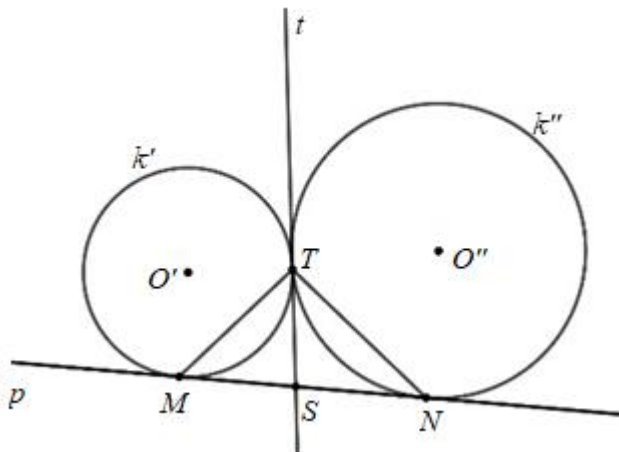
3. Кружниците k' и k'' надворешно се допираат во точката T , Една нивна заедничка тангента ги допира кружниците во точките M и N . Определи го $\angle MTN$.

Решение. Нека p

е заедничката тангента на кружниците која ги допира во точките M и N , t е заедничката тангента во допирната точка T и S е пресекот на правите p и t .

Тогаш од својствата на тангентните отсечки сле-

дува $\overline{SM} = \overline{ST} = \overline{SN}$. Според тоа, точките M, N, T припаѓаат на кружницата чиј дијаметар е MN . Конечно, од Талесовата теорема следува дека $\angle MTN = 90^\circ$.



4. Ема заминала на патување со одредена сума на пари. Првиот ден потрошила 1 денар и $\frac{1}{100}$ од остатокот од сумата. Вториот ден потрошила 11, а потоа $\frac{1}{100}$ од новиот остаток. Третиот ден потрошила 21 денари, а потоа $\frac{1}{100}$ од новиот остаток итн. Последниот ден потрошила онолку пари колку што потрошила сите претходни денови заедно. Колку денови Ема била на патување, ако секој ден освен последниот трошела иста сума пари и се вратила со 59301 денари?

Решение. Нека x е сумата која со себе ја понела Ема на патувањето.

Таа првиот ден потрошила $1 + \frac{x-1}{100}$, па и останале $x - 1 - \frac{x-1}{100} = \frac{99}{100}(x-1)$.

Вториот ден потрошила $11 + \frac{1}{100}(\frac{99}{100}(x-1)-11)$. Бидејќи Ема секој ден освен последниот трошела иста сума пари добиваме

$$1 + \frac{x-1}{100} = 11 + \frac{1}{100}(\frac{99}{100}(x-1)-11).$$

Решението на последната равенка е $x = 98901$, што значи дека на патувањето Ема понела 98901 денари. Сега, $1 + \frac{98901-1}{100} = 990$, односно Ема дневно трошела 990 денари. Од патувањето вратила 59301, што значи дека таа потрошила 39600 денари. Половината од овие пари таа ги потрошила последниот ден, што значи дека $\frac{39600}{2} = 19800$ Ема потрошила по 990 дневно. Конечно, $19800 : 990 = 20$ дена таа трошела по 990 денари на дена, а патувала 21 ден.

IX одделение

1. За еден природен број велиме дека го има својството $\mathcal{P}$, ако тој може да се претстави како збир на квадратите на два различни природни броја. Нека n е природен број, така што бројот $9n$ го има својството $\mathcal{P}$. Докажи дека за кој било природен број a бројот $(a^2+1)n$ го има својството $\mathcal{P}$.

Решение. Бидејќи бројот $9n$ го има својството $\mathcal{P}$ постојат природни броеви x и y такви што $9n = x^2 + y^2$. Понатаму, квадрат на природен број при делење со 3 дава остаток 0 или 1, па затоа од последното равенство следува дека $x = 3u$ и $y = 3v$, за некои $u, v \in \mathbb{N}$. Според тоа, $9n = (3u)^2 + (3v)^2$, од каде добиваме $n = u^2 + v^2$. Значи,

$$\begin{aligned}(a^2+1)n &= (a^2+1)(u^2+v^2) = a^2u^2 + a^2v^2 + u^2 + v^2 \\ &= a^2u^2 + 2auv + v^2 + a^2v^2 - 2auv + u^2 \\ &= (au+v)^2 + (av-u)^2 = |au+v|^2 + |av-u|^2,\end{aligned}$$

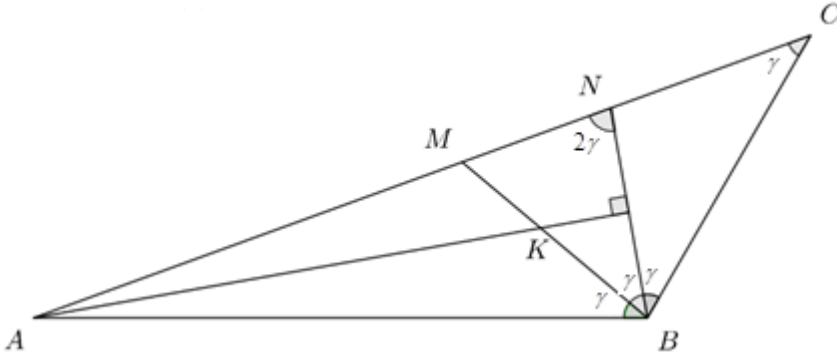
и како $|au+v|, |av-u| \in \mathbb{N}$ заклучуваме дека за кој било природен број a бројот $(a^2+1)n$ го има својството $\mathcal{P}$.

2. Во триаголникот ABC важи $\angle ABC = 3\angle ACB$. На страната AC земени се точки M и N (M е меѓу A и N), така што

$$\angle ABM = \angle MBN = \angle NBC.$$

Од точката A на правата BN е повлечена нормала која отсекува BM ја сече во точката K . Докажи дека правата NK е симетрала на $\angle ANB$.

Решение. Нека $\angle ACB = \gamma$. Тогаш од условот на задачата имаме $\angle ABC = 3\gamma$ и затоа $\angle ABM = \angle MBN = \angle NBC = \gamma$. Сега, $\angle ANB = 2\gamma$, како надворешен агол на триаголникот BCN .



Во триаголникот ANB имаме $\angle ABN = \angle ANB = 2\gamma$, што значи дека тој е рамнокрак. Според тоа, AK е симетрала на аголот при врвот A и како $\angle ABM = \angle MBN = \gamma$ заклучуваме дека BK е симетрала на аголот при темето B . Значи, точката K е пресек на две симетрали на аглите на триаголникот ANB , што значи дека правата NK е симетрала на $\angle ANB$.

3. Нека a и b се позитивни реални броеви такви што $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} = 1$. Докажи дека $\frac{a}{b^2+1} - \frac{b}{a^2+1} = a - b$.

Решение. Бидејќи $a+1 > 0, b+1 > 0$ од равенството $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} = 1$ следува $a(b+1) + b(a+1) = (a+1)(b+1)$, т.е. $ab + a + ba + b = ab + a + b + 1$, од каде добиваме $ab = 1$. Според тоа,

$$\begin{aligned} \frac{a}{b^2+1} - \frac{b}{a^2+1} &= \frac{a(a^2+1) - b(b^2+1)}{(b^2+1)(a^2+1)} = \frac{a^3 - b^3 + a - b}{a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1} = \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2) + (a-b)}{a^2 + b^2 + (ab)^2 + 1} \\ &= \frac{(a-b)(a^2 + b^2 + ab + 1)}{a^2 + b^2 + 1 + 1} = \frac{(a-b)(a^2 + b^2 + 1 + 1)}{a^2 + b^2 + 1 + 1} = a - b. \end{aligned}$$

4. На кружницата k земени се точки A, B, C, D, E , во дадениот редослед во насока на движењето на стрелките на часовникот, така што $\angle ABE = \angle BEC = \angle ECD = 45^\circ$. Докажи дека $\overline{AB}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{CD}^2$.

Решение. Од $\angle ABE = \angle BEC$ следува $AB \parallel EC$ и $\overline{AE} = \overline{BC}$, што значи дека четириаголникот $ABCE$ е рамнокрак трапез. Според тоа, $\overline{AC} = \overline{BE}$.

На потполно ист начин се докажува дека четириаголникот $BEDC$ е рамнокрак трапез и $\overline{BD} = \overline{EC}$.

Сега, $\angle EBD = \angle ECD = 45^\circ$ како агли над иста тетива ED и $\angle ECA = \angle ABE = 45^\circ$ како агли над иста тетива AE . Според тоа,

$$\angle ABD = \angle ABE + \angle EBD = 90^\circ \text{ и } \angle ACD = \angle ACE + \angle ECD = 90^\circ.$$

Значи, триаголниците ABD и ACD се правоаголни, па од Питагоровата теорема и равенствата $\overline{AE} = \overline{BC}$ и $\overline{BD} = \overline{EC}$ следува

$$\overline{AB}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{CD}^2.$$

