Пятнадцатый Турнир, 1993-1994

ПЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1993 г.
8-9 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
На сторонах шестиугольника было записано шесть чисел, а в каждой вершине - число, равное сумме двух чисел на смежных с ней сторонах. Затем все числа на сторонах и одно число в вершине стёрли. Можно ли восстановить число, стоявшее в вершине?
Фольклор

Задача 2.(3)
Вершины A, B, C треугольника соединены с точками A_1, B_1, C_1, лежащими на противоположных сторонах (не в вершинах).
Могут ли середины отрезков A_1, B_1, C_1 лежать на одной прямой?
Фольклор

Задача 3.(4)
Первоначально на доске написано натуральное число A. Разрешается прибавить к нему один из его делителей, отличных от него самого и единицы. С полученным числом разрешается проделать аналогичную операцию, и т. д.
Докажите, что из числа A=4 можно с помощью таких операций прийти к любому наперёд заданному составному числу.
М. Н. Вялый

Задача 4.(5)
Три шахматиста A, B и C сыграли матч-турнир (каждый с каждым сыграл одинаковое число партий). Может ли случиться, что по числу очков A занял первое место, C - последнее, а по числу побед, наоборот, A занял последнее место, C - первое (за победу присуждается одно очко, за ничью - пол-очка)?
А. Рубин

ПЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 24 октября 1993 г.
8-9 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(2+2)
В строчку выписано 10 целых чисел. Вторая строчка находится так: под каждым числом A первой строчки пишется число, равное количеству чисел первой строчки, которые больше A и при этом стоят правее A. По второй строчке аналогично строится третья строчка и т. д.
а)(2) Докажите, что все строчки, начиная с некоторой - нулевые (состоят из сплошных нулей).
б)(2) Каково максимально возможное число ненулевых строчек (содержащих хотя бы одно число, отличное от нуля)?
С. Токарев

Задача 2.(3)
Внутри квадрата ABCD лежит квадрат PQRS. Отрезки AP, BQ, CR и DS не пересекают друг друга и квадрата PQRS.
Докажите, что сумма площадей четырёхугольников ABQP и CDSR равна сумме площадей четырёхугольников BCRQ и DAPS.
Фольклор

Задача 3.(3)
Дан невыпуклый несамопересекающийся четырёхугольник, который имеет три внутренних угла по 45^{o}.
Докажите, что середины его сторон лежат в вершинах квадрата.
В. Произволов

Задача 4.(2+3)
В каждой клетке квадрата 8*8 клеток проведена одна из диагоналей. Рассмотрим объединение этих 64 диагоналей. Оно состоит из нескольких связных частей (к одной части относятся точки, между которыми можно пройти по одной или нескольким диагоналям).
Может ли количество этих частей быть
а)(2) больше 15?
б)(3) больше 20?
Н. Васильев

Задача 5.(6)
Через S(n) обозначим сумму цифр числа n (в десятичной записи). Существуют ли три таких различных натуральных числа m, n и p, что m+S(m)=n+S(n)=p+S(p)?
М. Гервер

Задача 6.(4+4)
Требуется сделать набор гирек, каждая из которых весит целое число граммов, с помощью которых можно взвесить любой целый вес от 1 грамма до 55 граммов включительно даже в том случае, если некоторые гирьки потеряны
(гирьки кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес - на другую).
Рассмотрите два варианта задачи:
а)(4) необходимо подобрать 10 гирек, из которых может быть потеряна любая одна;
б)(4) необходимо подобрать 12 гирек, из которых могут быть потеряны любые две.
(В обоих случаях докажите, что найденный Вами набор гирек обладает требуемыми свойствами.)
Д. Звонкин

ПЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1993 г.
10-11 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Конечно или бесконечно число натуральных решений уравнения
$x^2+y^3=z^2$?
Фольклор

Задача 2.(3)
На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взяты точки M и N такие, что BC=BM и AC=AN.
Докажите, что $\angle MCN=45^o$.
Фольклор

Задача 3.(5)
Числа 1, 2, 3, ..., 25 расставляют в таблицу 5*5 так, чтобы в каждой строке числа были расположены в порядке возрастания. Какое наибольшее и какое наименьшее значение может иметь сумма чисел в третьем столбце?
Фольклор

Задача 4.(5)
Петя хочет изготовить необычную игральную кость, которая, как обычно, должна иметь форму куба, на гранях которого нарисованы точки (на разных гранях разное число точек), но при этом на любых двух соседних гранях число точек должно различаться по крайней мере на два (при этом разрешается, чтобы на некоторых гранях оказалось больше шести точек).
Сколько всего точек необходимо для этого нарисовать? (Укажите минимальное количество, приведите пример их расположения на гранях и докажите, что меньшим числом обойтись нельзя.)
Фольклор

ПЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 24 октября 1993 г.
10-11 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
В угол вписана окружность; A и B - точки касания, C - вершина.
Докажите, что если отрезок расположен внутри невыпуклого криволинейного треугольника ABC, где AB - дуга окружности, то его длина меньше длины отрезка CA.
Фольклор

Задача 2.(3)
Десятичные записи натуральных чисел выписаны подряд, начиная с единицы, до некоторого n включительно:
12345678910111213...(n).
Существует ли такое n, что в этой записи все десять цифр встречаются одинаковое количество раз?
А. Анджанс

Задача 3.(3)
Рассматривается шестиугольник, являющийся пересечением двух (не обязательно равных) правильных треугольников.
Докажите, что если параллельно перенести один из треугольников, то периметр пересечения (если оно остаётся шестиугольником), не меняется.
В. Произволов

Задача 4.(6)
Выпуклый 1993-угольник разрезан на выпуклые семиугольники.
Докажите, что найдутся четыре соседние вершины 1993-угольника, принадлежащие одному семиугольнику. (Вершина семиугольника не может лежать внутри стороны 1993-угольника.)
А. Канель-Белов

Задача 5.(6)
В вершинах квадрата сидят четыре кузнечика. Они прыгают в произвольном порядке, но не одновременно. Каждый кузнечик прыгает в такую точку, которая симметрична точке, в которой он находился до прыжка, относительно центра тяжести трёх других кузнечиков.
Может ли в какой-то момент один кузнечик приземлиться на другого? (Кузнечики точечные.)
А. Анджанс

Задача 6.(8)
Известно, что уравнение
$x^4+ax^3+2x^2+bx+1=0$ имеет действительный корень.
Докажите неравенство: $a^2+b^2\geq 8$.
А. Егоров

ПЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1994 г.
8-9 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Построить выпуклый четырёхугольник, зная длины всех сторон и отрезка, соединяющего середины диагоналей.
Фольклор

Задача 2.(4)
На кружок пришло 60 учеников. Оказалось, что среди любых 10 учеников есть не меньше трёх одноклассников.
Докажите, что среди кружковцев найдётся по меньшей мере 15 учеников, которые учатся в одном классе.
Фольклор

Задача 3.(4)
Из точки O, лежащей внутри выпуклого n-угольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$, проведены отрезки ко всем вершинам OA_1, OA_2, ..., OA_n. Оказалось, что все углы между этими отрезками и прилегающими к ним сторонами n-угольника - острые, причём
$\angle OA_1A_n \le \angle OA_1A_2$, $\angle OA_2A_1 \le \angle OA_2A_3$, $\angle OA_{n-1}A_{n-2} \le \angle OA_{n-1}A_n$, $\angle OA_nA_{n-1} \le \angle OA_nA_1$.
Докажите, что O - центр окружности, вписанной в n-угольник.
В. Произволов

Задача 4.(5)
10 фишек стоят на столе по кругу. Сверху фишки красные, снизу - синие. Разрешены две операции: а) перевернуть четыре фишки, стоящие подряд; б) перевернуть четыре фишки, расположенные так: xx0xx (x - фишка, входящая в четвёрку, 0 - не входящая).
Удастся ли, используя несколько раз разрешённые операции, перевернуть все фишки синей стороной вверх?
А. Толпыго

ПЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 13 марта 1994 г.
8-9 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Ученик не заметил знака умножения между двумя трёхзначными числами и написал одно шестизначное число. Результат получился в три раза больше. Найти эти числа.
А. Ковальджи

Задача 2.(3)
Две окружности пересекаются в точках A и B. В точке A к обеим проведены касательные, пересекающие окружности в точках M и N. Прямые BM и BN пересекают окружности ещё раз в точках P и Q (P лежит на прямой BM, Q - на прямой BN). Докажите, что отрезки MP и NQ равны.
И. Нагель

Задача 3.(3)
Каждый из 450 депутатов парламента дал пощечину ровно одному своему коллеге. Докажите, что можно избрать парламентскую комиссию из 150 человек, среди членов которой никто никого не бил.
М. Н. Вялый

Задача 4.

```
0 1 2 3 ... 9
9 0 1 2 ... 8
8 9 0 1 ... 7
.............
1 2 3 4 ... 0
```
отмечено 10 элементов так, что в каждой строке и каждом столбце отмечен один элемент.
Докажите, что среди отмеченных элементов есть хотя бы два равных.
А. Савин

Задача 5.(5)
Существует ли такой выпуклый пятиугольник, от которого некоторая прямая отрезает подобный ему пятиугольник?
С. Токарев

Задача 6.(5)
В каждой целой точке числовой оси расположена лампочка с кнопкой, при нажатии которой лампочка меняет состояние - загорается или гаснет. Вначале все лампочки погашены. Задано конечное множество целых чисел - шаблон S. Его можно перемещать вдоль числовой оси как жесткую фигуру и, приложив в любом месте, поменять состояние множества всех лампочек, закрытых шаблоном.
Докажите, что при любом S за несколько операций можно добиться того, что будут гореть ровно две лампочки.
Б. Гинзбург

Задача 7.(5+2)
В квадрате клетчатой бумаги 10*10 вам нужно расставить корабли: 1*4 - один корабль, 1*3 - два, 1*2 - три и 1*1 - четыре корабля. Корабли не должны иметь общих точек (даже вершин) друг с другом, но могут прилегать к границам квадрата.
Докажите, что
а)(5) если расставлять их в указанном выше порядке (начиная с больших), то этот процесс всегда удается довести до конца, даже если вы в каждый момент заботитесь только об очередном корабле, не думая о будущих;
б)(2) если расставлять их в обратном порядке (начиная с малых), то может возникнуть ситуация, когда очередной корабль поставить нельзя (приведите пример).
К. Игнатьев

ПЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1994 г.
10-11 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(4)
Треугольник ABC вписан в окружность. Точка A_1 диаметрально противоположна точке A, точка A_0 - середина отрезка BC, точка A_2 симметрична точке A_1 относительно точки A_0. Точки B_2 и C_2 определяются аналогично, исходя из точек B и C.
Докажите, что точки A_2, B_2 и C_2 совпадают.
А. Ягубьянц

Задача 2.(2+3)
Последовательность натуральных чисел a(1), a(2), ..., a(n), ... такова, что для всякого n уравнение $a(n+2)x^2+a(n+1)x+a_n=0$ имеет действительный корень.
Может ли число членов этой последовательности быть
а)(2) равным 10;
б)(3) бесконечным?
А. Шаповалов

Задача 3.(4)
Имеется шоколадка с пятью продольными и восемью поперечными углублениями, по которым её можно ломать (всего получается 9*6=54 дольки). Играют двое, ходят по очереди. Играющий за свой ход отламывает от шоколадки полоску шириной 1 и съедает её. Другой играющий за свой ход делает то же самое с оставшейся частью, и т. д. Тот, кто разламывает полоску шириной 2 на две полоски шириной 1, съедает одну из них, а другую съедает его партнер.
Докажите, что начинающий игру может действовать таким образом, что ему достанется по крайней мере на 6 долек больше, чем второму (при любых действиях второго).
Р. Фёдоров

Задача 4.(4)
10 фишек стоят на столе по кругу. Сверху фишки красные, снизу - синие. Разрешены две операции: а) перевернуть четыре фишки, стоящие подряд; б) перевернуть четыре фишки, расположенные так: xx0xx (x - фишка, входящая в четвёрку, 0 - не входящая).
Удастся ли, используя несколько раз разрешённые операции, перевернуть все фишки синей стороной вверх?
А. Толпыго

ПЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 13 марта 1994 г.
10-11 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Существует ли бесконечное число троек целых чисел x, y, z таких, что
$x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3$?
Н. Васильев

Задача 2.(2+2)
$\{a_n\}$ - последовательность чисел между 0 и 1, в которой следом за x идет $1-|1-2x|$.
а)(2) Докажите, что если a_1 рациональное, то последовательность начиная с некоторого места периодическая.
б)(2) Докажите, что если последовательность начиная с некоторого места периодическая, то a_1 - рациональное.
Г. Шабат

Задача 3.(4)
У многочлена P(x) есть отрицательный коэффициент. Могут ли у всех его степеней $P^n(x)$, $n > 1$, все коэффициенты быть положительными?
О. Крижановский

Задача 4.(5)
На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D. В треугольники ABD и ACD вписаны окружности, и к ним проведена общая внешняя касательная (отличная от BC), пересекающая AD в точке K. Докажите, что длина отрезка AK не зависит от выбора точки D.
И. Шарыгин

Задача 5.(5)
Найдите наибольшее натуральное число, десятичная запись которого не заканчивается нулями, которое при вычеркивании одной (не первой) цифры уменьшается в целое число раз.
А. Галочкин

Задача 6.(5)
Рассматривается выпуклый четырёхугольник ABCD. Пары его противоположных сторон продолжены до пересечения: AB и CD - в точке P, CB и DA - в точке Q. Пусть l_A, l_B, l_C и l_D - биссектрисы внешних углов четырёхугольника при вершинах соответственно A, B, C, D. Пусть l_P и l_Q - внешние биссектрисы углов соответственно APD и AQB (то-есть биссектрисы углов, дополняющих эти углы до развёрнутого). Обозначим через M_{AC} точку пересечения l_A и l_C, через M_{BD} - l_B и l_D , через M_{PQ} - l_P и l_Q .
Докажите, что, если все три точки M_{AC}, M_{BD} и M_{PQ} существуют, то они лежат на одной прямой.
С. Маркелов

Задача 7.(3+3+2)
Рассматривается произвольный многоугольник (возможно, невыпуклый).
а)(3) Всегда ли найдётся хорда этого многоугольника, которая делит его площадь пополам?
б)(3) Докажите, что найдётся такая хорда, что площадь каждой из частей, на которые она разбивает многоугольник, не меньше, чем 1/3 площади всего многоугольника.
в)(2) Можно ли в пункте б) заменить число 1/3 на большее?
(Хордой многоугольника называется отрезок, концы которого принадлежат контуру многоугольника, а сам он целиком принадлежит многоугольнику, включая контур).
В. Произволов