ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 11 октября 2015 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
4	1.	Верно ли, что любое натуральное число можно умножить на одно из чисел 1, 2, 3, 4 или 5 так, чтобы результат начинался на цифру 1? *Егор Бакаев*
4	2.	Из одинаковых неравнобедренных прямоугольных треугольников составили прямоугольник (без дырок и наложений). Обязательно ли какие-то два из этих треугольников расположены так, что образуют прямоугольник? *Егор Бакаев*
5	3.	Трое играют в «камень-ножницы-бумагу». В каждом раунде каждый наугад показывает «камень», «ножницы» или «бумагу». «Камень» побеждает «ножницы», «ножницы» побеждают «бумагу», «бумага» побеждает «камень». Если в раунде было показано ровно два различных элемента (и значит, один из них показали дважды), то игроки (или игрок), показавшие победивший элемент, получают по 1 баллу; иначе баллы никому не начисляются. После нескольких раундов оказалось, что все элементы были показаны одинаковое количество раз. Докажите, что в этот момент сумма набранных всеми баллов делилась на 3. *Егор Бакаев*
5	4.	На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC отметили точки K и L соответственно, а на гипотенузе AB — точку M так, что $AK = BL = a$, $KM = LM = b$ и угол KML прямой. Докажите, что $a = b$. *Егор Бакаев*
	5.	В стране 100 городов, между каждыми двумя городами осуществляется беспосадочный перелет. Все рейсы платные и стоят положительное (возможно, нецелое) число тугриков. Для любой пары городов A и $Б$ перелет из A в $Б$ стоит столько же, сколько перелет из $Б$ в A. Средняя стоимость перелета равна 1 тугрику. Путешественник хочет облететь какие-нибудь m разных городов за m перелетов, начав и закончив в своем родном городе. Всегда ли ему удастся совершить такое путешествие, потратив на билеты не более m тугриков, если
3	а)	$m = 99$;
3	б)	$m = 100$? *Егор Бакаев*

ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 11 октября 2015 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
3	1.	Пусть p — простое число. Сколько существует таких натуральных n, что pn делится на $p+n$? *Борис Френкин*
4	2.	Даны равнобедренный прямоугольный треугольник ABC и прямоугольный треугольник ABD с общей гипотенузой AB (D и C лежат по одну сторону от прямой AB). Пусть DK — биссектриса в треугольнике ABD. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ACK лежит на прямой AD. *Егор Бакаев, Александр Зимин*
4	3.	Трое играют в «камень-ножницы-бумагу». В каждом раунде каждый наугад показывает «камень», «ножницы» или «бумагу». «Камень» побеждает «ножницы», «ножницы» побеждают «бумагу», «бумага» побеждает «камень». Если в раунде было показано ровно два различных элемента (и значит, один из них показали дважды), то игроки (или игрок), показавшие победивший элемент, получают по 1 баллу; иначе баллы никому не начисляются. После нескольких раундов оказалось, что все элементы были показаны одинаковое количество раз. Докажите, что в этот момент сумма набранных всеми баллов делилась на 3. *Егор Бакаев*
	4.	В стране 100 городов, между каждыми двумя городами осуществляется беспосадочный перелет. Все рейсы платные и стоят положительное (возможно, нецелое) число тугриков. Для любой пары городов A и $Б$ перелет из A в $Б$ стоит столько же, сколько перелет из $Б$ в A. Средняя стоимость перелета равна 1 тугрику. Путешественник хочет облететь какие-нибудь m разных городов за m перелетов, начав и закончив в своем родном городе. Всегда ли ему удастся совершить такое путешествие, потратив на билеты не более m тугриков, если
2	а)	$m = 99$;
2	б)	$m = 100$? *Егор Бакаев*
5	5.	Дана бесконечно возрастающая арифметическая прогрессия. Первые ее несколько членов сложили и сумму объявили первым членом новой последовательности, затем сложили следующие несколько членов исходной прогрессии и сумму объявили вторым членом новой последовательности, и так далее. Могла ли новая последовательность оказаться геометрической прогрессией? *Георгий Жуков*

ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

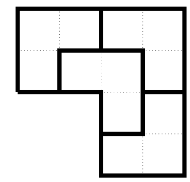
Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 25 октября 2015 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

1. Будем называть клетчатый многоугольник *выдающимся*, если он не является прямоугольником и из нескольких его копий можно сложить подобный ему многоугольник. Например, уголок из трёх клеток — выдающийся многоугольник (это видно из рисунка справа).



2 а) Придумайте выдающийся многоугольник из 4 клеток.

3 б) При каких $n > 4$ существует выдающийся многоугольник из n клеток?

Егор Бакаев

2. Из целых чисел от 1 до 100 удалили k чисел. Обязательно ли среди оставшихся чисел можно выбрать k различных чисел с суммой 100, если

2 а) $k = 9$;

4 б) $k = 8$?

Александр Шаповалов

3. Докажите, что сумма длин любых двух медиан произвольного треугольника

3 а) не больше $3P/4$, где P — периметр этого треугольника;

5 б) не меньше $3p/4$, где p — полупериметр этого треугольника.

Лев Емельянов

8 **4.** Из спичек сложен клетчатый квадрат 9×9, сторона каждой клетки — одна спичка. Петя и Вася по очереди убирают по спичке, начинает Петя. Выиграет тот, после чьего хода не останется целых квадратиков 1×1. Кто может действовать так, чтобы обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

Александр Шаповалов

8 **5.** В треугольнике ABC медианы AA_0, BB_0, CC_0 пересекаются в точке M. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников MA_0B_0, MCB_0, MA_0C_0, MBC_0 и точка M лежат на одной окружности.

Павел Кожевников

6. Петя увидел на доске несколько различных чисел и решил составить выражение, среди значений которого все эти числа есть, а других нет. Составляя выражение, Петя может использовать какие угодно числа, особый знак «$\pm$», а также обычные знаки «$+$», «$-$», «$\times$» и скобки. Значения составленного выражения он вычисляет, выбирая для каждого знака «$\pm$» либо «$+$», либо «$-$» во всех возможных комбинациях. Например, если на доске были числа 4 и 6, подойдет выражение 5 ± 1, а если на доске были числа 1, 2 и 3, то подойдет выражение $(2 \pm 0,5) \pm 0,5$. Возможно ли составить необходимое выражение, если на доске были написаны

3 а) числа 1, 2, 4;

7 б) любые 100 различных действительных чисел?

Koh, Bong-Gyun (Южная Корея)

10 **7.** У Деда Мороза было n сортов конфет, по k штук каждого сорта. Он распределил все конфеты как попало по k подаркам, в каждый — по n конфет, и раздал их k детям. Дети решили восстановить справедливость. Два ребёнка готовы передать друг другу по конфете, если каждый получает конфету сорта, которого у него нет. Всегда ли можно организовать серию обменов так, что у каждого окажутся конфеты всех сортов?

Михаил Евдокимов

ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 25 октября 2015 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

3 **1.** Геометрическая прогрессия состоит из 37 натуральных чисел. Первый и последний члены прогрессии взаимно просты. Докажите, что 19-й член прогрессии является 18-й степенью натурального числа.

Борис Френкин

6 **2.** Дан клетчатый квадрат 10×10. Внутри него провели 80 единичных отрезков по линиям сетки, которые разбили квадрат на 20 многоугольников равной площади. Докажите, что все эти многоугольники равны.

Павел Кожевников

6 **3.** Все коэффициенты некоторого непостоянного многочлена целые и по модулю не превосходят 2015. Докажите, что любой положительный корень этого многочлена больше, чем 1/2016.

Александр Храбров

7 **4.** Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Продолжения его противоположных сторон пересекаются в точках P и Q. Пусть K и N — середины диагоналей. Докажите, что сумма углов PKQ и PNQ равна $180°$.

Максим Дидин

5. Петя увидел на доске несколько различных чисел и решил составить выражение, среди значений которого все эти числа есть, а других нет. Составляя выражение, Петя может использовать какие угодно числа, особый знак «$\pm$», а также обычные знаки «$+$», «$-$», «$\times$» и скобки. Значения составленного выражения он вычисляет, выбирая для каждого знака «$\pm$» либо «$+$», либо «$-$» во всех возможных комбинациях. Например, если на доске были числа 4 и 6, подойдет выражение 5 ± 1, а если на доске были числа 1, 2 и 3, то подойдет выражение $(2 \pm 0,5) \pm 0,5$. Возможно ли составить необходимое выражение, если на доске были написаны

2 а) числа 1, 2, 4;

6 б) любые 100 различных действительных чисел?

Koh, Bong-Gyun (Южная Корея)

6. Арбуз имеет форму шара диаметра 20 см. Вася сделал длинным ножом три взаимно перпендикулярных плоских надреза глубиной h (надрез — это сегмент круга, h — высота сегмента, плоскости надрезов попарно перпендикулярны). Обязательно ли при этом арбуз разделится хотя бы на два куска, если

6 а) $h = 17$ см;

6 б) $h = 18$ см?

Михаил Евдокимов

12 **7.** Шеренга состоит из N ребят попарно различного роста. Её разбили на наименьшее возможное количество групп стоящих подряд ребят, в каждой из которых ребята стоят по возрастанию роста слева направо (возможны группы из одного человека). Потом в каждой группе переставили ребят по убыванию роста слева направо. Докажите, что после $N-1$ такой операции ребята будут стоять по убыванию роста слева направо.

Никита Гладков

ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 28 февраля 2016 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

3 1. По кругу стоят мальчики и девочки (есть и те, и другие), всего 20 детей. Известно, что у каждого мальчика сосед по часовой стрелке — ребёнок в синей футболке, а у каждой девочки сосед против часовой стрелки — ребёнок в красной футболке. Можно ли однозначно установить, сколько в круге мальчиков?

Егор Бакаев

4 2. В остроугольном треугольнике ABC угол C равен $60°$. Пусть H — точка пересечения высот этого треугольника. Окружность с центром H и радиусом HC второй раз пересекает прямые CA и CB в точках M и N соответственно. Докажите, что AN и BM параллельны (или совпадают).

Александр Зимин

5 3. Существуют ли 2016 целых чисел, сумма и произведение которых равны 2016?

Фольклор, предложил Михаил Евдокимов

5 4. В квадрате 10×10 все клетки левого верхнего квадрата 5×5 закрашены черным цветом, а остальные клетки — белым. На какое наибольшее количество многоугольников можно разрезать (по границам клеток) этот квадрат так, чтобы в каждом многоугольнике черных клеток было в три раза меньше, чем белых? (Многоугольники не обязаны быть равными или даже равновеликими.)

Егор Бакаев

5 5. На листе бумаги синим карандашом нарисовали треугольник, а затем провели в нём красным карандашом медиану, биссектрису и высоту (возможно, не все из разных вершин), лежащие внутри треугольника. Получили разбиение треугольника на части. Мог ли среди этих частей оказаться равносторонний треугольник с красными сторонами?

Михаил Евдокимов

ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 28 февраля 2016 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4 1. Точку внутри выпуклого четырехугольника соединили со всеми вершинами и с четырьмя точками на сторонах (по одной на стороне). Четырёхугольник оказался разделен на восемь треугольников с одинаковыми радиусами описанных окружностей. Докажите, что исходный четырёхугольник — вписанный.

Егор Бакаев

4 2. Существуют ли 2016 целых чисел, сумма и произведение которых равны 2016?

Фольклор, предложил Михаил Евдокимов

4 3. В квадрате 10×10 все клетки левого верхнего квадрата 5×5 закрашены черным цветом, а остальные клетки — белым. На какое наибольшее количество многоугольников можно разрезать (по границам клеток) этот квадрат так, чтобы в каждом многоугольнике черных клеток было в три раза меньше, чем белых? (Многоугольники не обязаны быть равными или даже равновеликими.)

Егор Бакаев

6 4. Фирма записала свои расходы в рублях по 100 статьям бюджета, получив список из 100 чисел (у каждого числа не более двух знаков после запятой). Каждый счетовод взял копию списка и находит приближённую сумму расходов, действуя следующим образом. Вначале он выбирает из списка любые два числа, складывает их, отбрасывает у суммы знаки после запятой (если они есть) и записывает результат вместо выбранных двух чисел. С полученным списком из 99 чисел он делает то же самое, и так далее, пока в списке не останется одно целое число. Оказалось, что в итоге все счетоводы получили разные результаты. Какое наибольшее число счетоводов могло работать в фирме?

Михаил Евдокимов

5. На каждом из 12 рёбер куба отметили его середину. Обязательно ли сфера проходит через все отмеченные точки, если известно, что она проходит

3 а) через какие-то 6 из отмеченных точек;

3 б) через какие-то 7 из отмеченных точек?

Михаил Евдокимов

ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 13 марта 2016 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
4	1.	На длинной ленте бумаги выписали все числа от 1 до миллиона включительно (в некотором произвольном порядке). Затем ленту разрезали на кусочки по две цифры в каждом кусочке. Докажите, что в каком бы порядке ни выписывались числа, на кусочках встретятся все двузначные числа. *Алексей Толпыго*
	2.	Существуют ли такие целые числа a и b, что
2	а)	уравнение $x^2 + ax + b = 0$ не имеет корней, а уравнение $[x^2] + ax + b = 0$ имеет?
3	б)	уравнение $x^2 + 2ax + b = 0$ не имеет корней, а уравнение $[x^2] + 2ax + b = 0$ имеет? (Знаком $[k]$ обозначается целая часть числа k, то есть наибольшее целое число, не превосходящее k.) *Александр Храбров*
6	3.	Дан квадрат со стороной 10. Разрежьте его на 100 равных четырехугольников, каждый из которых вписан в окружность диаметра $\sqrt{3}$. *Илья Богданов*
8	4.	Художник-абстракционист взял деревянный куб $5 \times 5 \times 5$, разбил каждую грань на единичные квадраты и окрасил каждый из них в один из трёх цветов — чёрный, белый или красный — так, что нет соседних по стороне квадратов одного цвета. Какое наименьшее число чёрных квадратов могло при этом получиться? (Квадраты, имеющие общую сторону, считаются соседними и в случае, если они лежат на одной грани куба, и в случае, если они лежат на разных гранях куба.) *Михаил Евдокимов*
8	5.	Пусть p — простое число, большее 10^k. Взяли число, делящееся на p, и вставили между какими-то двумя его соседними цифрами k-значное число A. Получили число, делящееся на p. В него вставили k-значное число B — между двумя соседними цифрами числа A, — и результат снова оказался делящимся на p. Докажите, что число B получается из числа A перестановкой цифр. *Илья Богданов*
9	6.	Робот-пылесос, имеющий форму круга, проехал по плоскому полу. Для каждой точки граничной окружности робота можно указать прямую, на которой эта точка оставалась в течение всего времени движения. Обязательно ли и центр робота оставался на некоторой прямой в течение всего времени движения? *Изяслав Вайнштейн*
	7.	
5	а)	Есть $2n + 1$ батареек ($n > 2$). Известно, что хороших среди них на одну больше, чем плохих, но какие именно батарейки хорошие, а какие плохие, неизвестно. В фонарик вставляются две батарейки, при этом он светит, только если обе — хорошие. За какое наименьшее число таких попыток можно гарантированно добиться, чтобы фонарик светил?
5	б)	Та же задача, но батареек $2n$ ($n > 2$), причём хороших и плохих поровну. *Александр Шаповалов*

ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 13 марта 2016 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи
4	1. На длинной ленте бумаги выписали все числа от 1 до миллиона включительно (в некотором произвольном порядке). Затем ленту разрезали на кусочки по две цифры в каждом кусочке. Докажите, что в каком бы порядке ни выписывались числа, на кусочках встретятся все двузначные числа. *Алексей Толпыго*
5	2. Дан квадрат со стороной 10. Разрежьте его на 100 равных четырехугольников, каждый из которых вписан в окружность диаметра $\sqrt{3}$. *Илья Богданов*
6	3. Пусть M — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. На сторонах AB и BC отмечены соответственно точки E и F так, что $AE \neq CF$ и $\angle FMC = \angle MEF = \alpha$. Найдите $\angle AEM$. *Максим Прасолов*
8	4. В стране 64 города, некоторые пары из них соединены дорогой, но нам неизвестно, какие именно. Мы можем выбрать любую пару городов и получить ответ на вопрос «есть ли дорога между ними?». Мы хотим узнать, можно ли в этой стране добраться от любого города до любого другого, двигаясь по дорогам. Докажите, что не существует алгоритма, позволяющего сделать это менее чем за 2016 вопросов. *Константин Кноп*
8	5. На доске написано несколько приведённых многочленов 37-й степени, все коэффициенты которых неотрицательны. (Многочлен называется приведённым, если его старший коэффициент равен 1.) Разрешается выбрать любые два выписанных многочлена f и g и заменить их на любые два приведённых многочлена 37-й степени f_1 и g_1, такие что $f + g = f_1 + g_1$ или $fg = f_1 g_1$. Докажите, что после применения любого конечного числа таких операций не может оказаться, что каждый многочлен на доске имеет 37 различных положительных корней. *Александр Кузнецов*
	6. Напомним, что палиндром — это слово, которое одинаково читается слева направо и справа налево.
4	а) Есть неограниченный набор карточек со словами «abc», «bca», «cab». Из них составляют слово по такому правилу. В качестве начального слова выбирается любая карточка, а далее на каждом шаге к имеющемуся слову можно либо приклеить карточку слева или справа, либо разрезать слово в любом месте (между буквами) и вклеить карточку туда. Можно ли так составить палиндром?
6	б) Есть неограниченный набор красных карточек со словами «abc», «bca», «cab» и синих карточек со словами «cba», «acb», «bac». Из них по тем же правилам составили палиндром. Верно ли, что было использовано одинаковое количество красных и синих карточек? *Александр Грибалко, Иван Митрофанов*
	7. На сферической планете с длиной экватора 1 планируют проложить N кольцевых дорог, каждая из которых будет идти по окружности длины 1. Затем по каждой дороге запустят несколько поездов. Все поезда будут ездить по дорогам с одной и той же положительной постоянной скоростью, никогда не останавливаясь и не сталкиваясь. Какова в таких условиях максимально возможная суммарная длина всех поездов? Поезда считайте дугами нулевой толщины, из которых выброшены концевые точки. Решите задачу в случаях:
4	а) $N = 3$;
6	б) $N = 4$. *Александр Бердников*

ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 20 марта 2016 г.

1. На доске написано произведение $\log_{\bigcirc}\square\cdot\ldots\cdot\log_{\bigcirc}\square$, всего 50 множителей. У Васи есть 100 карточек: $\boxed{2}$, ..., $\boxed{51}$ и (52), ..., (101). Вася выкладывает круглые карточки на места кружочков и квадратные — на места квадратиков. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями, которые может получить Вася.

Георгий Жуков

2. На плоскости зафиксированы луч с вершиной A и точка P вне прямой, содержащей этот луч. На луче выбирают переменную точку K, затем на продолжении AK за точку K отмечают точку N так, что $NK = 1$, а на прямой PK отмечают точку M (отличную от K) так, что $NM = 1$. Докажите, что все прямые NM, полученные таким образом, касаются одной окружности.

Егор Бакаев

3. Прямоугольник $p\times q$, где p, q — натуральные взаимно простые числа, $p < q$, разбит на единичные квадратики. Из левого нижнего угла прямоугольника в его правый верхний угол проведена диагональ. Она отсекает треугольники от некоторых квадратиков. Найдите суммарный периметр всех этих треугольников.

Алексей Толпыго

4. На сборах теннисистов было 30 мастеров и 30 юниоров. Каждый мастер сыграл с одним мастером и пятнадцатью юниорами, а каждый юниор — с одним юниором и пятнадцатью мастерами. Докажите, что найдутся такие два мастера и два юниора, что эти мастера сыграли между собой, юниоры — между собой, каждый из двух мастеров — хотя бы с одним из двух юниоров, а каждый из двух юниоров — хотя бы с одним из двух мастеров.

Александр Грибалко

5. В выпуклой шестиугольной пирамиде длины одиннадцати ребер равны 1. Чему может быть равна длина двенадцатого ребра?

Михаил Евдокимов

6. На доске написано N чисел: все они различны, и одно из них равно 0. Можно взять любой ненулевой многочлен, каждый коэффициент которого равен одному из написанных чисел (среди коэффициентов могут быть равные), и дописать на доску все корни этого многочлена. За несколько таких операций на доске оказались все целые числа от -2016 по 2016 (и возможно ещё какие-то числа). Найдите наименьшее возможное значение N.

Георгий Жуков

37th International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior O-Level Paper **Fall 2015**

Problem 1. Is it true that every positive integer can be multiplied by one of the digits 1, 2, 3, 4 or 5 so that the resulting number starts with 1?

Solution. Let the number a start with digit x. We are going to check that for any a by appropriate choice of n from $\{1,2,3,4,5\}$ the product of $a \times n$ starts with 1.

(i) $x = 1$. We chose $n = 1$.

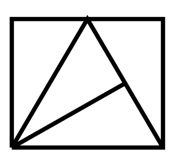
(ii) $x = 2, 3$. We choose $n = 5$. Indeed, the smallest value of the product $a \times 5$ is $20\ldots0 \times 5$ while the largest value of the product does not exceed $39\ldots9 \times 5 = (40\ldots0 - 1) \times 5$. Both of these numbers start with digit 1, so do all the numbers in between.

(iii) $x = 4$. We can choose $n = 3$. The smallest value of $a \times n$ is no less than $40\ldots0 \times 3$ while the largest number does not exceed $4\ldots9 = (50\ldots0 - 1) \times 3$. Both of these numbers as well as all numbers in between start with digit 1.

(iv) $x = 5, 6, 7, 8, 9$. We choose $n = 2$. The smallest value of $a \times n$ is no less than $50\ldots0 \times 2$ while the largest number does not exceed $9\ldots9 = (10\ldots0 - 1) \times 2$. Both of these numbers as well all numbers in between start with digit 1. $\square$

Problem 2. A rectangle is split into equal non-isosceles right-angled triangles (without gaps or overlaps). Is it true that any such arrangement contains a rectangle made of two such triangles?

Solution. Counterexample. Rectangle with sides $2, \sqrt{3}$ can be split into four non-isosceles right angle triangles with angles $30°$ and $60°$ as shown on the picture. No two triangles are arranged into rectangle.



$\square$

Problem 3. Three players play the game "rock-paper-scissors". In every round, each player simultaneously shows one of these shapes. Rock beats scissors, scissors beat paper, while paper beats rock. If in a round exactly two distinct shapes are shown (and thus one of them is shown twice) then 1 point is added to the score of the player(s) who showed the winning shape, otherwise no point is added. After several rounds it occurred that each shape had been shown the same number of times. Prove that the total sum of points at this moment was a multiple of 3.

Solution. Outcome in a round is a triple of shapes and depending on the number of distinct shapes can be one of three kinds: (x, x, x), (x, y, z), and (x, x, y), where x, y and z stand for shapes.

Note that outcomes (x, x, x), (x, y, z) worth no points so if by the final moment of the game no other outcomes appear, then the total number of points $P = 0$. Assume there is an outcome (x, x, y). Then there is at least one more outcome from this category (when exactly two shapes are the same). We will show the way of replacing two outcomes of this sort by two new triples, one of which worths no point while preserving the number of points by modulo 3 (In other words P modulo 3 is invariant under operation of rearrangement).

Assume that $x < y$. Then $y < z$ and $z < x$ so that we have $P(x, x, x) = 0$, $P(y, y, y) = 0$, $P(z, z, z) = 0$, $P(x, x, y) = 1$, $P(x, y, y) = 2$, $P(x, z, z) = 1$, $P(x, x, z) = 2$, $P(y, y, z) = z$, $P(y, z, z) = 2$.

Below the list all possible cases for the second triple.

Case (x, x, y). $(x, x, y) + (x, x, y) \to (x, x, x) + (x, y, y)$. $\Delta P \equiv 0 \mod 3$.

(ΔP is the difference between the numbers of the total points before and after rearrangement).

Case (x, y, y). $(x, x, y) + (x, y, y) \to (x, x, x) + (x, y, y)$. $\Delta P \equiv 0 \mod 3$.

Case (x, x, z). $(x, x, y) + (x, x, z) \to (x, x, x) + (x, y, z)$. $\Delta P \equiv 0 \mod 3$.

Case (x, z, z). $(x, x, y) + (x, z, z) \to (x, x, x) + (y, z, z)$. $\Delta P \equiv 0 \mod 3$.

Case (y, y, z). $(x, x, y) + (y, y, z) \to (y, y, y) + (x, x, z)$. $\Delta P \equiv 0 \mod 3$.

Case (y, z, z). $(x, x, y) + (y, z, z) \to (x, y, z) + (x, y, z)$. $\Delta P \equiv 0 \mod 3$.

Since the number of triples of the third category keeps decreasing eventually we come to a situation when no such elements left. Since P is invariant and we started with $P \equiv \mod 3$, then at the final moment $P \equiv 0 \mod 3$. □

Solution 2. (Hessami Elnaz). Let r, s, p represent rock, scissors and paper respectively. We can exclude from consideration outcomes (r, p, s) since they contribute evenly in a total of each shape and worth no points. Assume that combinations (r, r, p), (r, r, s),(r, r, s), (s, s, r), (s, s, p), (p, p, r), (p, p, s), (r, r, r), (p, p, p), (s, s, s) appeared $b, c, d, e, f, g, u, v, w$ times respectively. Then the total number of points $P = b + d + g + 2c + 2e + 2f$.

According to the condition in the end of the game all shapes appeared in equal numbers. Thus we have:

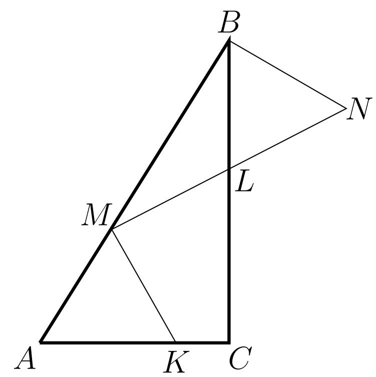
$$\begin{aligned}
&2b + 2c + d + f + 3u = n, \\
&b + e + 2f + 2g + 3v = n, \\
&c + 2d + 2e + g + 3w = n
\end{aligned}$$

Adding the first and the second doubled equation we have

$$4b + 2c + 2e + 5f + d + 4g + 3u + 6v = 3n \implies$$
$$b + d + g + 2c + 2e + 2f \equiv 0 \mod 3.$$

Hence, $P \equiv 0 \mod 3$. □

Problem 4. In a right-angled triangle ABC ($\angle C = 90°$) points K, L and M are chosen on sides AC, BC and AB respectively so that $AK = BL = a$, $KM = LM = b$ and $\angle KML = 90°$. Prove that $a = b$.



Solution. On extension of ML above point L mark point N such that $LN = ML$. Since quadrilateral $KMLC$ is cyclic ($\angle KML + \angle LCK = 180°$), $\angle BLN = \angle AKM$. Therefore triangles AMK and LBN are congruent (S-A-S). Then $\angle LBN = \angle MAK$. It follows that $\angle MBN = 90°$. Then L is a centre of the circumcircle of triangle MBN. Hence, $BL = ML$ as radiuses of the same circle. □

Problem 5. In a country there are 100 cities. Every two cities are connected by a direct flight (in both directions). Each flight costs a positive (not necessarily integer) number of doubloons. The flights in both directions between two given cities are of the same cost. The average cost of a flight is 1 doubloon. A traveller plans to visit any m cities for m flights, starting and ending at his native city (which must be one of these m cities). Can the traveller always fulfil his plans given that he can spend at most m doubloons if

(a) $m = 99$;

(b) $m = 100$?

Solution. Let $A_1, A_2, \dots A_{100}$ denote cities and let A_1 be a home town of the traveller.

(a) $m = 99$. The traveller can not fulfil his plans for sure. Example.

Let the cost of each flight connecting A_1 with every other city be $p = \$43$ while the cost of each of the remaining flights (connecting A_i and A_j, $i \neq 1, j \neq 1$) be $q = \$1/7$. Then the average of one flight is $2(99p + 99 \times 98q)/100 \times 99 = 1$ while the cost of any route including m cities which starts and ends at A_1 is $(2p + 97q)/99 > 99$.

(b) $m = 100$. *(Steven Chow)* In this case a route is a loop consisting of 100 cities. The routes differ only by the order of cities. No route passes through the same city twice. The traveller's home city is no special so he can start his route at any city.

Consider the total number of doubloons that the traveller must spent for every possible route. An average cost of one route is the sum of these costs divided by the number of possible routes.

Since every flight comes the same number of times in the total number of possible routes (it follows from symmetry of the situation), and since the average cost of one flight is 1 doubloon, the average cost of one route is 100 doubloons.

Then there is a route with the cost not exceeding 100 doubloons. Hence the traveller can always fulfil his plans. $\square$

37th International Mathematics

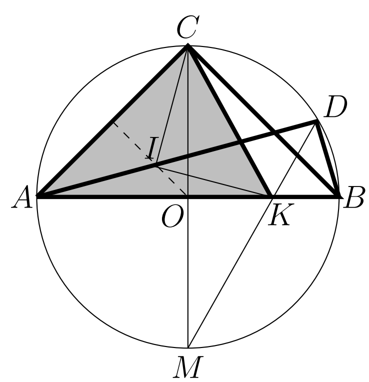
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior O-Level Paper **Fall 2015**

Problem 1. Let p be a prime number. Determine the number of positive integers n such that pn is a multiple of $p+n$.

Solution. Let k be a positive integer such that $pn = k(n+p)$. Then $pn = kn+kp$ and $n-k = kn/p$. Note that $k < n$ and $k < p$ ($n-k$ must be positive while kn/p can not exceed n). It follows that $n = mp$, where m is a positive integer. Thus, $pm-k = km$ so that $p = k(m+1)/m$ and therefore $k = lm$, where l is a positive integer. Then $p = l(m+1)$ which implies that $l = 1$ (p is prime). Hence $m = p-1$ and $n = p(p-1)$ is the only one possible value. $\square$

Problem 2. Suppose that ABC and ABD are right-angled triangles with common hypotenuse AB (D and C are on the same side of line AB). If $AC = BC$ and DK is a bisector of angle ADB, prove that the circumcenter of triangle ACK belongs to line AD.



Solution. Observe that triangles ABC and ADB share the same circumcircle with diameter AB. Denote by M a point symmetrical to C about the centre. Observe that K belongs to MD. (Indeed $AM = BM$ implies that $\angle ADM = \angle MDB$).

Let $\angle CAD = \alpha$. Then $\angle CMD = \angle CAD = \alpha$. Since triangle CMK is isosceles its altitude OK is also a bisector and therefore $\angle AKC = 90^\circ - \alpha$. Let I be a point on AD equidistant from A and C. Since $\angle ACI = \angle CAI = \alpha$, $\angle AIC = 180^\circ - 2\alpha$. Consider a circle with centre I and radius $AI = CI$. Since $\angle AKC = 1/2\angle AIC$, K belongs to this circle. Hence I is a centre of circumcircle of triangle ACK. $\square$

Problem 3. Three players play the game "rock-paper-scissors". In every round, each player simultaneously shows one of these shapes. Rock beats scissors, scissors beat paper, while paper beats rock. If in a round exactly two distinct shapes are shown (and thus one of them is shown twice) then 1 point is added to the score of the player(s) who showed the winning shape, otherwise no point is added. After several rounds it occurred that each shape had been shown the same number of times. Prove that the total sum of points at this moment was a multiple of 3.

Solution. Outcome in a round is a triple of shapes and depending on the number of distinct shapes can be one of three kinds: (x, x, x), (x, y, z), and (x, x, y), where x, y and z stand for shapes.

Note that outcomes (x, x, x), (x, y, z) worth no points so if by the final moment of the game no other outcomes appear, then the total number of points $P = 0$. Assume there is an outcome (x, x, y). Then there is at least one more outcome from this category (when exactly two shapes are the same). We will show the way of replacing two outcomes of this sort by two new triples, one of which worths no point while preserving the number of points by modulo 3 (In other words P modulo 3 is invariant under operation of rearrangement).

Assume that $x < y$. Then $y < z$ and $z < x$ so that we have $P(x, x, x) = 0$, $P(y, y, y) = 0$, $P(z, z, z) = 0$, $P(x, x, y) = 1$, $P(x, y, y) = 2$, $P(x, z, z) = 1$, $P(x, x, z) = 2$, $P(y, y, z) = z$, $P(y, z, z) = 2$.

Below the list all possible cases for the second triple.

Case (x, x, y). $(x, x, y) + (x, x, y) \to (x, x, x) + (x, y, y)$. $\Delta P \equiv 0 \mod 3$.

(ΔP is the difference between the numbers of the total points before and after rearrangement).

Case (x, y, y). $(x, x, y) + (x, y, y) \to (x, x, x) + (x, y, y)$. $\Delta P \equiv 0 \mod 3$.

Case (x, x, z). $(x, x, y) + (x, x, z) \to (x, x, x) + (x, y, z)$. $\Delta P \equiv 0 \mod 3$.

Case (x, z, z). $(x, x, y) + (x, z, z) \to (x, x, x) + (y, z, z)$. $\Delta P \equiv 0 \mod 3$.

Case (y, y, z). $(x, x, y) + (y, y, z) \to (y, y, y) + (x, x, z)$. $\Delta P \equiv 0 \mod 3$.

Case (y, z, z). $(x, x, y) + (y, z, z) \to (x, y, z) + (x, y, z)$. $\Delta P \equiv 0 \mod 3$.

Since the number of triples of the third category keeps decreasing eventually we come to a situation when no such elements left. Since P is invariant and we started with $P \equiv \mod 3$, then at the final moment $P \equiv 0 \mod 3$. □

Solution 2. (Hessami Elnaz). Let r, s, p represent rock, scissors and paper respectively. We can exclude from consideration outcomes (r, p, s) since they contribute evenly in a total of each shape and worth no points. Assume that combinations (r, r, p), (r, r, s),(r, r, s), (s, s, r), (s, s, p), (p, p, r), (p, p, s), (r, r, r), (p, p, p), (s, s, s) appeared $b, c, d, e, f, g, u, v, w$ times respectively. Then the total number of points $P = b + d + g + 2c + 2e + 2f$.

According to the condition in the end of the game all shapes appeared in equal numbers. Thus we have:

$$\begin{aligned}
&2b + 2c + d + f + 3u = n,\\
&b + e + 2f + 2g + 3v = n,\\
&c + 2d + 2e + g + 3w = n
\end{aligned}$$

Adding the first and the second doubled equation we have

$$\begin{aligned}
&4b + 2c + 2e + 5f + d + 4g + 3u + 6v = 3n \implies\\
&b + d + g + 2c + 2e + 2f \equiv 0 \mod 3.
\end{aligned}$$

Hence, $P \equiv 0 \mod 3$. □

Problem 4. In a country there are 100 cities. Every two cities are connected by a direct flight (in both directions). Each flight costs a positive (not necessarily integer) number of doubloons. The flights in both directions between two given cities are of the same cost. The average cost of a flight is 1 doubloon. A traveller plans to visit any m cities for m flights, starting and ending at his native city (which must be one of these m cities). Can the traveller always fulfil his plans given that he can spend at most m doubloons if

(a) $m = 99$;

(b) $m = 100$?

Solution. Let $A_1, A_2, \dots A_{100}$ denote cities and let A_1 be a home town of the traveller.

(a) $m = 99$. The traveller can not fulfil his plans for sure. Example.

Let the cost of each flight connecting A_1 with every other city be $p = \$43$ while the cost of each of the remaining flights (connecting A_i and A_j, $i \neq 1, j \neq 1$) be $q = \$1/7$. Then the average of one flight is $2(99p + 99 \times 98q)/100 \times 99 = 1$ while the cost of any route including m cities which starts and ends at A_1 is $(2p + 97q)/99 > 99$.

(b) $m = 100$. *(Steven Chow)* In this case a route is a loop consisting of 100 cities. The routes differ only by the order of cities. No route passes through the same city twice. The traveller's home city is no special so he can start his route at any city.

Consider the total number of doubloons that the traveller must spent for every possible route. An average cost of one route is the sum of these costs divided by the number of possible routes.

Since every flight comes the same number of times in the total number of possible routes (it follows from symmetry of the situation), and since the average cost of one flight is 1 doubloon, the average cost of one route is 100 doubloons.

Then there is a route with the cost not exceeding 100 doubloons. Hence the traveller can always fulfil his plans.

$\square$

Problem 5. An infinite increasing arithmetical progression is given. A new sequence is constructed in the following way: its first term is the sum of several first terms of the original sequence, its second term is the sum of several next terms of the original sequence and so on. Is it possible that the new sequence is a geometrical progression?

Solution. Example.

Arithmetical sequence: $1 + 2 + 3 + \cdots + n + \ldots$.

Geometrical sequence: $1 + 9 + 9^2 + \cdots + 9^k + \ldots$.

Let us show that for any $k = 0, 1, \ldots,$ there exists such n that

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = 1 + 9 + 9^2 + \cdots + 9^k.$$

which is equivalent to $(9^{k+1} - 1)/8 = n(n+1)/2$. Solving this equation we find that $n = (3^{k+1} - 1)/2$. $\square$