35. MEĐUNARODNI MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA
Osnovna prolećna varijanta, 16.2.2014.
Mlađi uzrast (8. razred osnovnih i 1. razred srednjih škola)
Izrada zadataka traje 5 sati
Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je učenik dobio najveći broj poena

---

poeni	zadatak	
3	1.	Dato je 100 realnih brojeva. Svaki broj je povećan za 1. Ispostavilo se da je suma kvadrata svih brojeva ostala nepromenjena. Odrediti kako će se suma kvadrata promeniti, ako još jednom svaki broj povećamo za 1.
4	2.	Oljina mama je ispekla 15 pitica: 7 sa kupusom, 7 sa mesom i jednu sa višnjama, a nakon toga ih je poređala u krug, baš u tom redosledu, u smeru kretanja kazaljki na satu. Olja želi da pojede piticu sa višnjama. Sve pitice izgledaju identično i Olja ne zna koja je sa višnjama, ali zna da su pitice poređane u navedenom redosledu. Da li Olja može da pojede piticu sa višnjama ako joj je dozvoljeno da proba najviše 3 od ostalih pitica?
4	3.	Polja tablice dimenzije 7×5 popunjena su brojevima. Petar ne zna koji je broj na kom polju, ali zna da je suma brojeva u svakom pravougaoniku dimenzije 2×3 (i 3×2) jednaka 0. Ukoliko ga zanima koji je broj na nekom konkretnom polju, Petar tu informaciju plaća 100 dinara. Koji je najmanji broj dinara potreban Petru da bi saznao kolika je ukupna suma brojeva na svim poljima tablice?
5	4.	Na stranici BC trougla ABC uočena je tačka L takva da je $AL = 2 \cdot CM$, pri čemu je M sredina stranice AB. Ukoliko je $\angle ALC = 45^o$, dokazati da je $AL \perp CM$.
6	5.	Ali Baba i 40 razbojnika žele da pređu preko Bosforskog moreuza. Oni su se poređali u vrstu: Ali Baba na čelu vrste, a za njim 40 razbojnika. Ali Baba je u prijateljskim odnosima sa svojim susedom i sa razbojnikom koji stoji pored njegovog suseda; svaki drugi čovek iz vrste je u prijateljskim odnosima jedino sa ljudima koji stoje pored njega. Za prelazak preko moreuza, oni imaju samo jedan čamac koji može da preveze 2 ili 3 čoveka odjednom (nije dozvoljeno da se samo jedan čovek vozi u čamcu, niti više od 3 čoveka). Takođe, svi ljudi u čamcu moraju da budu međusobno u prijateljskim odnosima. Da li Ali Baba i 40 razbojnika sigurno mogu da pređu preko moreuza?

35. MEĐUNARODNI MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA

Osnovna prolećna varijanta, 16.2.2014.
Stariji uzrast (2. i 3. razred srednjih škola)
Izrada zadataka traje 5 sati
Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je učenik dobio najveći broj poena

---

poeni zadatak

4 — 1. Džeki ima 36 kamenčića čije su mase 1 gram, 2 grama, …, 36 grama. Čen ima super-lepak takav da je jedna njegova kap dovoljna da spoji dva kamenčića u jedan (sa dve kapi lepka je moguće spojiti tri kamenčića u jedan itd). Čen želi da spoji neke kamenčiće tako da u novonastalom skupu kamenčića Džeki neće moći da izabere jedan ili više njih sa ukupnom masom od tačno 37 grama. Odrediti koliko je najmanje kapi lepka potrebno da bi Čen ispunio svoj cilj.

4 — 2. Dijagonale konveksnog četvorougla $ABCD$ su međusobno normalne. Neka su M i N tačke na stranicama AD i CD, redom, takve da su uglovi $\angle ABN$ i $\angle CBM$ pravi. Dokazati da je AC paralelno sa MN.

5 — 3. Ali Baba i 40 razbojnika žele da pređu preko Bosforskog moreuza. Oni su se poređali u vrstu: Ali Baba na čelu vrste, a za njim 40 razbojnika. Ali Baba je u prijateljskim odnosima sa svojim susedom i sa razbojnikom koji stoji pored njegovog suseda; svaki drugi čovek iz vrste je u prijateljskim odnosima jedino sa ljudima koji stoje pored njega. Za prelazak preko moreuza, oni imaju samo jedan čamac koji može da preveze 2 ili 3 čoveka odjednom (nije dozvoljeno da se samo jedan čovek vozi u čamcu, niti više od 3 čoveka). Takođe, svi ljudi u čamcu moraju da budu međusobno u prijateljskim odnosima. Da li Ali Baba i 40 razbojnika sigurno mogu da pređu preko moreuza?

5 — 4. Prirodni brojevi a, b, c i d su uzajamno prosti po parovima i važi

$$ab + cd = ac - 10bd.$$

Dokazati da među njima postoje tri broja tako da je jedan od njih jednak sumi preostala dva.

5 — 5. Tri šetača – Miške, Marko i Nikola se šetaju po stranicama i dijagonalama konveksnog četvorougla $ABCD$. Miške počinje u temenu A i šeta se maršutom $AB - BC - CD$. Marko se šeta duž dijagonale AC; on kreće iz A u isto vreme kad i Miške i stiže u C u isto vreme kad i Miške. Nikola se šeta duž dijagonale BD; on kreće iz B u isto vreme kada Miške prolazi kroz B i stiže u D u isto vreme kad i Miške. Da li se može destiti da se Marko i Nikola nađu u istom trenutku u preseku dijagonala AC i BD? Brzine svih šetača su konstantne.

35. MEĐUNARODNI MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA

Napredna prolećna varijanta, 1.3.2014.

Mlađi uzrast (8. razred osnovnih i 1. razred srednjih škola)

Izrada zadataka traje 5 sati

Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je student osvojio najveći broj poena

---

points	problems
3	1. Deda Mraz je deci podelio 47 čokoladica i 74 štrudlica. Svaka devojčica dobila je za jednu više čokoladicu od svakog dečaka, a svaki dečak dobio je za jednu više štrudlicu od svake devojčice. Koliko je dece bilo?
5	2. Petar želi da obeleži neka polja table 5×5 tako da Vasa nije u mogućnosti da na tu tablu postavi nekoliko figurica u obliku slova L sastavljenih od 3 kvadratića, tako da su sva obeležena polja pokrivena postavljenim figuricama, kao i da se nikoje dve figurice ne preklapaju, niti neka figurica viri sa table. Koji je najmanji broj polja koji Petar treba da obeleži da bi u ovome uspeo?
6	3. Na kvadratni sto stavljena je kvadratna krpa, ne obavezno iste veličine, tako da na krpi nema prevoja i nabora. Svi uglovi stola ostali su nepokriveni, a svi delovi krpe koji vise sa stola su trougaoni. Poznato je da su dva susedna viseća dela podudarna. Dokazati da su i druga dva viseća dela podudarna.
7	4. Kralj je pozvao dva čarobnjaka i rekao im je sledeće: "Prvi će zapisati 100 ne obavezno različitih prirodnih brojeva, a drugom će biti zadatak da pogodi koji su brojevi zapisani (ako ima jednakih, onda mora pogoditi za svaki broj koliko je puta zapisan). Prvi čarobnjak može da pomogne drugom čarobnjaku na sledeći način. On može da sastavi listu međusobno različitih prirodnih brojeva takvu da je svaki broj sa te liste ili jednak nekom zapisanom broju, ili jednak sumi nekih zapisanih brojeva. Drugi čarobnjak ne sme da zna koji su od brojeva sa liste jednaki zapisanom broju a koji su suma zapisanih brojeva, ali na osnovu te liste treba da pogodi koji su brojevi zapisani. Bilo kakvog dodatnog dogovora među vama ne sme da bude. Ako u tome ne uspete, pogubiću vas, a ako uspete, za svaki broj sa liste otkinuću vam po jednu dlaku sa brade". Odrediti najmanji broj dlaka koje čarobnjaci moraju da izgube po ceni da ostanu živi.
7	5. U ravni je dato nekoliko belih i nekoliko crnih tačaka i između svake dve tačke različitih boja konstruisana je duž. Svakoj duži dodeljen je jedan prirodan broj. Ispostavilo se da ako krenemo od jedne tačke i krećemo se po dužima tako da se nakon nekoliko koraka vratimo u tu tačku, proizvod brojeva pridruženih dužima po kojima se krećemo kada idemo od bele tačke do crne, jednak je proizvodu brojeva pridruženih dužima po kojima se krećemo kada idemo od crne tačke do bele. Da li odatle sledi da je moguće svakoj tački pridružiti po jedan prirodan broj tako da je broj pridružen svakoj duži jednak proizvodu brojeva pridruženih njenim temenima?
9	6. Kocka $3 \times 3 \times 3$ sastavljena je od kockica $1 \times 1 \times 1$. Koji je najveći broj kockica $1 \times 1 \times 1$ koje možemo ukloniti, tako da preostalo telo zadovoljava: 1) Projekcija tela na ravan svake strane prvobitne kocke je kvadrat 3×3; 2) Od bilo koje kockice možemo doći do bilo koje druge kockice prelazeći iz kockice u njoj susednu kockicu (susedne kockice su one koje dele jednu stranu)?
9	7. Na kružnici u smeru kretanja kazaljki na satu date su tačke $A_1, A_2, ..., A_{10}$, koje se mogu podeliti u 5 parova dijametralno suprotnih tačaka. U početku se u svakoj tački nalazi po jedan skakavac. Svakog minuta, jedan skakavac preskače jednog od svojih suseda i dolazi u tačku na kružnici tako da se rastojanje između njega i preskočenog skakavca nije promenilo. Pri tome, nije dozvoljeno preskočiti bilo kog drugog skakavca, niti doći u već okupiranu tačku. Nakon nekog trenutka, u tačkama $A_1, A_2, ..., A_9$ nalazio se po jedan skakavac, a deseti je bio na luku $A_9A_{10}A_1$. Da li odatle sledi da je taj skakavac obavezno bio u tački A_{10}?

35. MEĐUNARODNI MATEMATIČKI TURNIR GRADOVA

Napredna prolećna varijanta, 1.3.2014.
Stariji uzrast (2. 3. i 4. razred srednjih škola)
Izrada zadataka traje 5 sati
Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je student osvojio najveći broj poena

---

points problems

3 — 1. Maša je napisala nekoliko jedinica i između njih dopisala znake $+$ i $\cdot$, kao i neke zagrade i kao rezultat dobila 2014. Miška je sve znake $+$ zamenio sa $\cdot$, a znake $\cdot$ zamenio je znakom $+$ i takođe dobio 2014. Da li je ovo moguće?

2. Da li je tačno da se svaki konveksan poligon može podeliti pravom na dva poligona jednakih obima i jednakih

4 — a) najdužih stranica?

4 — b) najkraćih stranice?

6 — 3. Kralj je pozvao dva čarobnjaka i rekao im je sledeće: "Prvi će zapisati 100 ne obavezno različitih pozitivnih realnih brojeva, a drugom će biti zadatak da pogodi koji su brojevi zapisani (ako ima jednakih, onda mora pogoditi za svaki broj koliko je puta zapisan). Prvi čarobnjak može da pomogne drugom čarobnjaku na sledeći način. On može da sastavi listu međusobno različitih realnih brojeva takvu da je svaki broj sa te liste ili jednak nekom zapisanom broju, ili jednak sumi nekih zapisanih brojeva. Drugi čarobnjak ne sme da zna koji su od brojeva sa liste jednaki zapisanom broju a koji su suma zapisanih brojeva, ali na osnovu te liste treba da pogodi koji su brojevi zapisani. Bilo kakvog dodatnog dogovora među vama ne sme da bude. Ako u tome ne uspete, pogubiću vas, a ako uspete, za svaki broj sa liste otkinuću vam po jednu dlaku sa brade". Odrediti najmanji broj dlaka koje čarobnjaci moraju da izgube po ceni da ostanu živi.

7 — 4. U koordinatnoj ravni obeležene su sve tačke sa celobrojnim koordinatama (x, y) takvim da je $0 \leq y \leq 10$. Koliko najviše obeleženih tačaka može istovremeno pripadati grafiku jednog polinoma 20-tog stepena sa celobrojnim koeficijentima.

8 — 5. Dat je nejednakokraki trougao. Petar i Vasa igraju sledeću igru: u jednom potezu prvo Petar odabere jednu tačku u ravni, a Vasa odabere da li će obojiti tu tačku u crveno ili plavo. Petar pobeđuje ako se može naći trougao sličan onom datom i takav da su mu sva tri temena obojena istom bojom. Pronaći minimalan broj poteza potreban Petru da bi pobedio, bez obzira na početni trougao i Vasinu igru.

9 — 6. U nekoj zemlji svakom gradu je dodeljen po jedan broj, tako da su svi dodeljeni brojevi međusobno različiti. Za svaka dva od dodeljenih brojeva, zapisano je da li su gradovi sa tim brojevima povezani direktnom avionskom linijom, ili nisu. Poznato je da za bilo koja dva dodeljena broja M i N, moguće je izvršiti drugačije dodeljivanje brojeva gradovima, tako da se gradu kome je bio dodeljen broj M sada dodeli broj N, a da zapis među kojim "brojevima" postoji direktna avionska linija i dalje ostane potpuno tačan.
Da li odatle sledi da je za svaka dva dodeljena broja M i N moguće drugačije dodeliti brojeve gradovima, tako da grad koji je imao broj N sada ima broj M i da grad koji je imao broj M sada ima broj N, a da zapis među kojim "brojevima" postoje linije i dalje bude tačan?

10 — 7. Dat je polinom $P(x)$ takav da je

$$P(0) = 1; \quad (P(x))^2 = 1 + x + x^{100}Q(x), \text{ gde je } Q(x) \text{ takođe polinom.}$$

Dokazati da je u polinomu $(P(x) + 1)^{100}$ koeficijent uz x^{99} jednak nuli.

ТРИДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 13 октября 2013 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
3	1. В турнире участвуют 100 борцов, все разной силы. Более сильный всегда побеждает более слабого. Борцы разбились на пары и провели поединки. Затем разбились на пары по-другому и снова провели поединки. Призы получили те, кто выиграл оба поединка. Каково наименьшее возможное количество призёров? *Б. Френкин*
4	2. Найдется ли десятизначное число, записанное десятью различными цифрами, такое, что после вычеркивания из него любых шести цифр получится составное четырехзначное число? *К. Кноп*
4	3. Наибольший общий делитель натуральных чисел a, b будем обозначать (a, b). Пусть натуральное число n таково, что $(n, n+1) < (n, n+2) < \dots < (n, n+35)$. Докажите, что $(n, n+35) < (n, n+36)$. *Б. Френкин*
5	4. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отметили соответственно точки K и L так, что $AK = CL$ и $\angle ALK + \angle LKB = 60^\circ$. Докажите, что $KL = BC$. *Е. Бакаев*
6	5. На шахматной доске стоят 8 не бьющих друг друга ладей. Докажите, что можно каждую из них передвинуть ходом коня так, что они по-прежнему не будут бить друг друга. (Все восемь ладей передвигаются «одновременно», то есть если, например, две ладьи бьют друг друга ходом коня, то их можно поменять местами.) *Е. Бакаев*

ТРИДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 13 октября 2013 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

3

1. Найдется ли десятизначное число, записанное десятью различными цифрами, такое, что после вычеркивания из него любых шести цифр получится составное четырехзначное число?

К. Кноп

4

2. На сторонах треугольника ABC построены три подобных треугольника: YBA и ZAC — во внешнюю сторону, а XBC — внутрь (соответственные вершины перечисляются в одинаковом порядке). Докажите, что $AYXZ$ — параллелограмм.

фольклор, предложил А. Бердников

4

3. Наименьшее общее кратное натуральных чисел a, b будем обозначать $[a, b]$. Пусть натуральное число n таково, что

$$[n, n+1] > [n, n+2] > \cdots > [n, n+35].$$

Докажите, что $[n, n+35] > [n, n+36]$.

Б. Френкин

5

4. На шахматной доске стоят 8 не бьющих друг друга ладей. Докажите, что можно каждую из них передвинуть ходом коня так, что они по-прежнему не будут бить друг друга. (Все восемь ладей передвигаются «одновременно», то есть если, например, две ладьи бьют друг друга ходом коня, то их можно поменять местами.)

Е. Бакаев

6

5. Космический аппарат сел на астероид, про который известно только, что он представляет собой шар или куб. Аппарат прополз по поверхности астероида в точку, симметричную начальной относительно центра астероида. Всё это время он непрерывно передавал свои пространственные координаты на космическую станцию, и там построили точную трехмерную модель траектории аппарата. Может ли этого оказаться недостаточно, чтобы отличить, по кубу или по шару ползал аппарат?

Е. Бакаев

ТРИДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 27 октября 2013 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

5 1. Есть 100 красных, 100 жёлтых и 100 зелёных палочек. Известно, что из любых трёх палочек трёх разных цветов можно составить треугольник. Докажите, что найдётся такой цвет, что из любых трёх палочек этого цвета можно составить треугольник.

Г. Жуков, Н. Косинов

5 2. Учитель выбрал 10 подряд идущих натуральных чисел и сообщил их Пете и Васе. Каждый мальчик должен разбить эти 10 чисел на пары, посчитать произведение чисел в каждой паре, а затем сложить полученные 5 произведений. Докажите, что мальчики могут сделать это так, чтобы разбиения на пары у них не были одинаковыми, но итоговые суммы совпадали.

Н. Авилов

6 3. В треугольнике ABC угол C прямой. На катете CB как на диаметре во внешнюю сторону построена полуокружность, точка N — середина этой полуокружности. Докажите, что прямая AN делит пополам биссектрису угла C.

Р. Гордин

7 4. Петя нарисовал на плоскости квадрат, разделил на 64 одинаковых квадратика и раскрасил их в шахматном порядке в черный и белый цвета. После этого он загадал точку, находящуюся строго внутри одного из этих квадратиков. Вася может начертить на плоскости любую замкнутую ломаную без самопересечений и получить ответ на вопрос, находится ли загаданная точка строго внутри ломаной или нет. За какое наименьшее количество таких вопросов Вася может узнать, какого цвета загаданная точка — белого или черного?

Е. Бакаев

9 5. В окружность вписан 101-угольник. Из каждой его вершины опустили перпендикуляр на прямую, содержащую противоположную сторону. Докажите, что хотя бы у одного из перпендикуляров основание попадёт на сторону (а не на её продолжение).

П. Кожевников

10 6. Число

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

представили в виде несократимой дроби. Докажите, что если $3n+1$ — простое число, то числитель получившейся дроби делится на $3n+1$.

М. Малкин

12 7. Петя и Вася играют в такую игру. Сначала на столе лежит 11 кучек по 10 камней. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждым ходом игрок берёт 1, 2 или 3 камня, но Петя каждый раз выбирает все камни из любой одной кучи, а Вася всегда выбирает все камни из разных кучек (если их больше одного). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

Е. Бакаев

ТРИДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 27 октября 2013 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

5 1. Петя нарисовал на плоскости квадрат, разделил на 64 одинаковых квадратика и раскрасил их в шахматном порядке в черный и белый цвета. После этого он загадал точку, находящуюся строго внутри одного из этих квадратиков. Вася может начертить на плоскости любую замкнутую ломаную без самопересечений и получить ответ на вопрос, находится ли загаданная точка строго внутри ломаной или нет. За какое наименьшее количество таких вопросов Вася может узнать, какого цвета загаданная точка — белого или черного?

Е. Бакаев

6 2. Найдите все n, для которых верно утверждение:
для любых двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ степени n найдутся такие одночлены ax^k и bx^ℓ, где $0 \le k, \ell \le n$, что графики многочленов $P(x) + ax^k$ и $Q(x) + bx^\ell$ не будут иметь общих точек.

Г. Жуков

6 3. Дан правильный треугольник ABC с центром O. Прямая, проходящая через вершину C, пересекает описанную окружность треугольника AOB в точках D и E. Докажите, что точки A, O и середины отрезков BD, BE лежат на одной окружности.

А. Заславский

7 4. Каждое ли целое число можно записать как сумму кубов нескольких целых чисел, среди которых нет одинаковых?

Bong-Gyun Koh (Южная Корея)

5. Существуют ли такие две функции f и g, принимающие только целые значения, что для любого целого x выполнены соотношения:

3 а) $f(f(x)) = x, \quad g(g(x)) = x, \quad f(g(x)) > x, \quad g(f(x)) > x$?

5 б) $f(f(x)) < x, \quad g(g(x)) < x, \quad f(g(x)) > x, \quad g(f(x)) > x$?

Л. Стунжас

9 6. Петя и Вася играют в такую игру. Сначала на столе лежит 11 кучек по 10 камней. Игроки ходят по очереди, начинает Петя. Каждым ходом игрок берёт 1, 2 или 3 камня, но Петя каждый раз выбирает все камни из любой одной кучи, а Вася всегда выбирает все камни из разных кучек (если их больше одного). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

Е. Бакаев

14 7. На плоскости нарисована замкнутая самопересекающаяся ломаная. Она пересекает каждое свое звено ровно один раз, причём через каждую точку самопересечения проходят ровно два звена. Может ли каждая точка самопересечения делить оба этих звена пополам? (Нет самопересечений в вершинах и звеньев с общим отрезком.)

А. Шаповалов, А. Лебедев

ТРИДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 16 февраля 2014 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
3	1. Даны 100 чисел. Когда каждое из них увеличили на 1, сумма их квадратов не изменилась. Каждое число ещё раз увеличили на 1. Изменится ли сумма квадратов на этот раз, и если да, то на сколько? *А. В. Шаповалов*
4	2. Мама испекла одинаковые с виду пирожки: 7 с капустой, 7 с мясом и один с вишней, и выложила их по кругу на круглое блюдо именно в таком порядке. Потом поставила блюдо в микроволновку подогреть. Оля знает, как лежали пирожки, но не знает, как повернулось блюдо. Она хочет съесть пирожок с вишней, а остальные считает невкусными. Как Оле наверняка добиться этого, надкусив не больше трех невкусных пирожков? *А. В. Хачатурян*
4	3. Клетки таблицы 7×5 заполнены числами так, что в каждом прямоугольнике 2×3 (вертикальном или горизонтальном) сумма чисел равна нулю. Заплатив 100 рублей, можно выбрать любую клетку и узнать, какое число в ней записано. Какого наименьшего числа рублей хватит, чтобы наверняка определить сумму всех чисел таблицы? *Е. В. Бакаев*
5	4. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка L так, что AL в два раза больше медианы CM. Оказалось, что угол ALC равен $45°$. Докажите, что AL и CM перпендикулярны. *Р. Г. Женодаров*
6	5. На переправу через пролив Босфор выстроилась очередь: первый Али-Баба, за ним 40 разбойников. Лодка одна, в ней могут плыть двое или трое (в одиночку плыть нельзя). Среди плывущих в лодке не должно быть людей, которые не дружат между собой. Смогут ли все они переправиться, если каждые двое рядом стоящих в очереди — друзья, а Али-Баба ещё дружит с разбойником, стоящим через одного от него? *А. В. Шаповалов*

ТРИДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 16 февраля 2014 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
4	1. У Чебурашки есть набор из 36 камней массами 1 г, 2 г, …, 36 г, а у Шапокляк есть суперклей, одной каплей которого можно склеить два камня в один (соответственно, можно склеить 3 камня двумя каплями и так далее). Шапокляк хочет склеить камни так, чтобы Чебурашка не смог из получившегося набора выбрать один или несколько камней общей массой 37 г. Какого наименьшего количества капель клея ей хватит, чтобы осуществить задуманное? *Е. В. Бакаев*
4	2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали перпендикулярны. На сторонах AD и CD отмечены соответственно точки M и N так, что углы ABN и CBM прямые. Докажите, что прямые AC и MN параллельны. *А. А. Полянский*
5	3. На переправу через пролив Босфор выстроилась очередь: первый Али-Баба, за ним 40 разбойников. Лодка одна, в ней могут плыть двое или трое (в одиночку плыть нельзя). Среди плывущих в лодке не должно быть людей, которые не дружат между собой. Смогут ли все они переправиться, если каждые двое рядом стоящих в очереди — друзья, а Али-Баба ещё дружит с разбойником, стоящим через одного от него? *А. В. Шаповалов*
5	4. Натуральные числа a, b, c, d попарно взаимно просты и удовлетворяют равенству $$ab + cd = ac - 10bd.$$ Докажите, что среди них найдутся три числа, одно из которых равно сумме двух других. *Б. Р. Френкин*
5	5. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пешеход Петя выходит из вершины A, идёт по стороне AB и далее по контуру четырёхугольника. Пешеход Вася выходит из вершины A одновременно с Петей, идёт по диагонали AC и одновременно с Петей приходит в C. Пешеход Толя выходит из вершины B в тот момент, когда её проходит Петя, идёт по диагонали BD и одновременно с Петей приходит в D. Скорости пешеходов постоянны. Могли ли Вася и Толя прийти в точку пересечения диагоналей O одновременно? *Б. Р. Френкин*

ТРИДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 2 марта 2014 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи	
3	1.	Дед Мороз раздал детям 47 шоколадок так, что каждая девочка получила на одну шоколадку больше, чем каждый мальчик. Затем дед Мороз раздал тем же детям 74 мармеладки так, что каждый мальчик получил на одну мармеладку больше, чем каждая девочка. Сколько всего было детей? *А. В. Бакаев*
5	2.	На клетчатой доске 5×5 Петя отмечает несколько клеток. Вася выиграет, если сможет накрыть все эти клетки неперекрывающимися и не вылезающими за границу квадрата уголками из трёх клеток (уголки разрешается класть только «по клеточкам»). Какое наименьшее число клеток должен отметить Петя, чтобы Вася не смог выиграть? *А. В. Шаповалов*
6	3.	На квадратном столе лежит квадратная скатерть так, что ни один угол стола не закрыт, но с каждой стороны стола свисает треугольный кусок скатерти. Известно, что какие-то два соседних куска равны. Докажите, что и два других куска тоже равны. (Скатерть нигде не накладывается сама на себя, ее размеры могут отличаться от размеров стола.) *Е. В. Бакаев*
7	4.	Царь вызвал двух мудрецов. Он дал первому 100 пустых карточек и приказал написать на каждой по натуральному числу (числа не обязательно разные), не показывая их второму. Затем первый может сообщить второму несколько различных чисел, каждое из которых либо записано на какой-то карточке, либо равно сумме чисел на каких-то карточках (не уточняя, как именно каждое число получено). Второй должен определить, какие 100 чисел написаны на карточках. Если он этого не сможет, обоим отрубят головы; иначе из бороды каждого вырвут столько волосков, сколько чисел сообщил первый второму. Как мудрецам, не сговариваясь, остаться в живых и потерять минимальное количество волосков? *И. И. Богданов*
7	5.	Дано несколько белых и несколько черных точек. От каждой белой точки идет стрелка в каждую черную, на каждой стрелке написано натуральное число. Известно, что если пройти по любому замкнутому маршруту из стрелок, то произведение чисел на стрелках, идущих по направлению движения, равно произведению чисел на стрелках, идущих против направления движения. Обязательно ли тогда можно поставить в каждой точке натуральное число так, чтобы число на каждой стрелке равнялось произведению чисел на ее концах? *А. А. Пахарев*
9	6.	Из кубиков $1 \times 1 \times 1$ склеен куб $3 \times 3 \times 3$. Какое наибольшее количество кубиков можно из него выкинуть, чтобы осталась фигура с такими двумя свойствами: • со стороны любой грани исходного куба фигура выглядит как квадрат 3×3 (глядя перпендикулярно этой грани, мы не увидим просвета — видны 9 кубиков фигуры); • переходя в фигуре от кубика к кубику через их общую грань, можно от любого кубика добраться до любого другого? *А. А. Марачев*
9	7.	На окружности отмечены 10 точек, занумерованные по часовой стрелке: $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$, причём известно, что их можно разбить на пары симметричных относительно центра окружности. Изначально в каждой отмеченной точке сидит по кузнечику. Каждую минуту один из кузнечиков прыгает *вдоль окружности* через своего соседа так, чтобы расстояние между ними не изменилось. При этом нельзя пролетать над другими кузнечиками и попадать в точку, где уже сидит кузнечик. Через некоторое время оказалось, что какие-то 9 кузнечиков сидят в точках $A_1, A_2, \ldots, A_9$, а десятый кузнечик сидит на дуге $A_9A_{10}A_1$. Можно ли утверждать, что он сидит именно в точке A_{10}? *Е. В. Бакаев*

ТРИДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 2 марта 2014 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
3	1.	Незнайка хвастается, что написал в ряд несколько единиц, поставил между каждыми соседними единицами знак «+» или «×», расставил скобки и получил выражение, значение которого равно 2014; более того, если в этом выражении заменить одновременно все знаки «+» на знаки «×», а знаки «×» на знаки «+», все равно получится 2014. Может ли он быть прав? *В. А. Клепцын*
	2.	Верно ли, что любой выпуклый многоугольник можно по прямой разрезать на два меньших многоугольника с равными периметрами и
4	а)	равными наибольшими сторонами?
4	б)	равными наименьшими сторонами? *А. В. Шаповалов*
6	3.	Царь вызвал двух мудрецов. Он дал первому 100 пустых карточек и приказал написать на каждой по положительному числу (числа не обязательно разные), не показывая их второму. Затем первый может сообщить второму несколько различных чисел, каждое из которых либо записано на какой-то карточке, либо равно сумме чисел на каких-то карточках (не уточняя, как именно каждое число получено). Второй должен определить, какие 100 чисел написаны на карточках. Если он этого не сможет, обоим отрубят головы; иначе из бороды каждого вырвут столько волосков, сколько чисел сообщил первый второму. Как мудрецам, не сговариваясь, остаться в живых и потерять минимальное количество волосков? *И. И. Богданов*
7	4.	Дан многочлен двадцатой степени с целыми коэффициентами. На плоскости отметили все точки с целыми координатами, у которых ординаты не меньше 0 и не больше 10. Какое наибольшее число отмеченных точек может лежать на графике этого многочлена? *Г. К. Жуков*
8	5.	Дан треугольник, у которого нет равных углов. Петя и Вася играют в такую игру: за один ход Петя отмечает точку на плоскости, а Вася красит ее по своему выбору в красный или синий цвет. Петя выиграет, если какие-то три из отмеченных им и покрашенных Васей точек образуют одноцветный треугольник, подобный исходному. За какое наименьшее число ходов Петя сможет гарантированно выиграть (каков бы ни был исходный треугольник)? *К. А. Кноп*
9	6.	Каждому городу в некоторой стране присвоен индивидуальный номер. Имеется список, в котором для каждой пары номеров указано, соединены города с данными номерами железной дорогой или нет. Оказалось, что, какие ни взять два номера M и N из списка, можно так перенумеровать города, что город с номером M получит номер N, но список по-прежнему будет верным. Верно ли, что, какие ни взять два номера M и N из списка, можно так перенумеровать города, что город с номером M получит номер N, город с номером N получит номер M, но список по-прежнему будет верным? *А. А. Пахарев, М. Б. Скопенков, А. В. Устинов*
10	7.	Многочлен $P(x)$ удовлетворяет условиям: $$P(0) = 1; \quad (P(x))^2 = 1 + x + x^{100}Q(x), \text{ где } Q(x) \text{ – некий многочлен.}$$ Докажите, что коэффициент при x^{99} в многочлене $(P(x)+1)^{100}$ равен нулю. *Д. А. Звонкин*

ТРИДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 10 марта 2014 г.

---

1. В множестве $\{1, 2, 3, \ldots, 2014\}$ выбрали подмножество A. Оказалось, что никакой квадратный трехчлен, все три коэффициента которого принадлежат A, не имеет действительных корней. Какое наибольшее число элементов могло быть в A?

Г. Жуков

2. Дан треугольник ABC. Луч, проведенный из вершины B через середину AC, пересекает внешнюю биссектрису угла A в точке P. Прямая PC пересекает прямую, содержащую внутреннюю биссектрису угла A, в точке Q. Докажите, что $BA = BQ$.

Ф. Ивлев

3. Профессор Выбегалло написал 1001 статью. В каждой статье он может поставить ссылки на другие статьи, но никакие две статьи не должны ссылаться друг на друга. Выбегалло получит *значимость* k, если после этого у него будет k статей, на каждую из которых ссылаются хотя бы k статей. Какой наибольшей значимости он может добиться?

И. Богданов, Е. Молчанов

4. В равногранном тетраэдре $ABCD$ точки A', B', C', D' — центры вневписанных сфер. Докажите, что A, B, C, D — центры вневписанных сфер тетраэдра $A'B'C'D'$. (Тетраэдр называется равногранным, если его грани — равные треугольники. Вневписанная сфера — это сфера, которая касается одной из граней и продолжений остальных граней.)

А. Заславский

5. В белом клетчатом прямоугольнике, стороны которого больше 10, в черный цвет покрасили K клеток. Далее за ход выбирают ряд (горизонтальный или вертикальный), в котором черных клеток хотя бы 10, и красят в черный цвет все белые клетки этого ряда. После нескольких таких ходов все клетки стали черными. Докажите, что $K \geq 100$.

П. Кожевников

6. Докажите, что не существует многочлена от двух переменных $P(x, y)$, для которого множеством решений неравенства $P(x, y) > 0$ является квадрант $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$.

Л. Стунжас

Решения задач

1. В множестве $\{1, 2, 3, \ldots, 2014\}$ выбрали подмножество A. Оказалось, что никакой квадратный трехчлен, все три коэффициента которого принадлежат A, не имеет действительных корней. Какое наибольшее число элементов могло быть в A?

Г. Жуков

Если $p, q \in A$ и $2p \leqslant q$, то дискриминант трехчлена $px^2 + qx + p$ неотрицательный, значит, у него есть корни. Таким образом, множество A не содержит чисел, отличающихся хотя бы вдвое.

Покажем, что если в A отношение любых двух чисел меньше 2, то все трехчлены с коэффициентами из A не имеют корней. Пусть M — наибольшее из чисел в A, а m — наименьшее. Тогда дискриминант трехчлена с коэффициентами из A не больше $M^2 - 4m^2 < 0$.

Очевидно, что максимальное подмножество $\{1, \ldots, 2014\}$, в котором отношение любых двух чисел меньше 2, имеет мощность 1007 (подходит, например, $\{1008, \ldots, 2014\}$.

2. Дан треугольник ABC. Луч, проведенный из вершины B через середину AC, пересекает внешнюю биссектрису угла A в точке P. Прямая PC пересекает прямую, содержащую внутреннюю биссектрису угла A, в точке Q. Докажите, что $BA = BQ$.

Ф. Ивлев

Проведём через точку B прямую, параллельную основанию AC. Пусть она пересекает продолжение внутренней биссектрисы угла A в точке Q_1, а внешнюю биссектрису угла A — в точке R. Обозначив угол A исходного треугольника за 2α, получаем: $\alpha = \angle BAQ_1 = \angle CAQ_1 = \angle BQ_1A$, откуда $AB = BQ_1$.

Так как внутренняя и внешняя биссектрисы угла A перпендикулярны, то $\angle RAQ_1 = \angle RAB + \alpha = 90°$. Но из прямоугольного треугольника RAQ_1 имеем: $\angle BRA + \alpha = 90°$, откуда $\angle BAR = \angle BRA$, и значит $BR = BA$ и следовательно $BR = BQ_1$.

Продлим теперь Q_1C до пересечения с внешней биссектрисой угла A в точке P_1. Тогда P_1B разделит AC пополам (так как $AC \parallel RQ_1$, и B делит RQ_1 пополам), откуда $P = P_1$, и значит $Q = Q_1$ и $AB = BQ$.

3. Профессор Выбегалло написал 1001 статью. В каждой статье он может поставить ссылки на другие статьи, но никакие две статьи не должны ссылаться друг на друга. Выбегалло получит *значимость* k, если после этого у него будет k статей, на каждую из которых ссылаются хотя бы k статей. Какой наибольшей значимости он может добиться?

И. Богданов, Е. Молчанов

Пусть найдётся k статей, на каждую из которых ссылается k других. Обозначим множество этих k статей через X. Заметим, что всего ссылок, ведущих из X в X, не более $\frac{k(k-1)}{2}$. Значит, в множестве X найдётся статья, в которую ведёт не более $\frac{k-1}{2}$ ссылок из X. Это значит, что в эту статью ведёт ещё как минимум $\frac{k+1}{2}$ ссылок не из X, откуда $1001 \geq k + \frac{k+1}{2}$. Преобразуя неравенство, получаем: $2002 \geq 3k + 1$, откуда $k \leq 667$.

Осталось построить пример, где найдутся 667 статей, на каждую из которых ссылаются хотя бы 667 статей. Выберем из 1001 статьи любое множество X из 667 статей, расположим их по кругу и на каждую статью сделаем ссылки в следующих за ней по кругу 333 статьях.

Осталось 334 статьи, не вошедшие в множество X — в каждой из них дадим ссылку на все статьи из X. Легко видеть, что на каждую статью из множества X будет сделано 667 ссылок.

4. В равногранном тетраэдре $ABCD$ точки A', B', C', D' — центры вневписанных сфер. Докажите, что A, B, C, D — центры вневписанных сфер тетраэдра $A'B'C'D'$. (Тетраэдр называется равногранным, если его грани — равные треугольники. Вневписанная сфера — это сфера, которая касается одной из граней и продолжений остальных граней.)

А. Заславский

Решение 1. Точки A', B' принадлежат внешней биссекторной плоскости двугранного угла CD. Значит прямые $A'B'$ и CD пересекаются. С другой стороны, A', B' лежат в биссекторной плоскости угла AB, которая в силу равногранности тетраэдра делит ребро CD пополам, т.е. прямая $A'B'$ проходит через середину CD. Аналогично прямые $A'C'$ и $B'C'$ проходят через середины ребер BD и AD соответственно. Следовательно, плоскость $A'B'C'$ симметрична ABC относительно центра тяжести M тетраэдра $ABCD$. Аналогично получаем, что и остальные грани $A'B'C'D'$ симметричны соответствующим граням $ABCD$ относительно M, что, очевидно, влечет утверждение задачи.

Решение 2. Переобозначим наш тетрадр $KML'N'$ и впишем его в параллелепипед $KLMNK'L'M'N'$. Тогда в каждой его грани диагонали равны (ибо они равны противоположным рёбрам тетраэдра). Значит, параллелепипед прямоугольный. Тогда из симметрии (относительно плоскости $KMK'M'$) очевидно, что плоскость $KLMN$ образует равные углы с плоскостями KML' и KMN'; из этого и подобных свойств следует, что искомые центры вневписанных сфер — это K', M', L и N. Теперь утверждение задачи очевидно из симметрии относительно центра параллелепипеда.

5. В белом клетчатом прямоугольнике, стороны которого больше 10, в черный цвет покрасили K клеток. Далее за ход выбирают ряд (горизонтальный или вертикальный), в котором черных клеток хотя бы 10, и красят в черный цвет все белые клетки этого ряда. После нескольких таких ходов все клетки стали черными. Докажите, что $K \geq 100$.

П. Кожевников

Докажем более общее утверждение для следующей (m, n)-игры для любых натуральных m, n.

В белом клетчатом прямоугольнике $M \times N$ (M строк и N столбцов), где $M > m$, $N > n$, в черный цвет покрасили K клеток. За ход выбирают строку, в которой черных клеток хотя бы n, и красят все ее белые клетки в черный цвет, или выбирают столбец, в котором черных клеток хотя бы m, и красят все его белые клетки в черный цвет. Тогда если после нескольких таких ходов все клетки станут черными, то $K \geq mn$.

Индукция по $m+n$. При $m = 1$ утверждение верно: чтобы закрасить в итоге все клетки, в начале должно быть не менее n столбцов, в которых есть хоть одна черная клетка. Аналогично при $n = 1$ утверждение верно.

Рассмотрим теперь (m, n)-игру в прямоугольнике $M \times N$, где $M > m > 1$, $N > n > 1$. Очевидно, хотя бы один ход была сделан. Пусть для определенности этот ход был в последней строке (от перестановки строк и столбцов условие задачи не меняется, для первого хода в столбце рассуждения аналогичны). Тогда далее мы можем отбросить эту строку и считать, что происходит $(m-1, n)$-игра в прямоугольнике $(M-1) \times N$. По предположению индукции в этом прямоугольнике изначально не менее $(m-1)n$ черных клеток. Плюс не менее n черных клеток в последней строке. Итого не менее чем $(m-1)n + n = mn$ черных клеток.

6. Докажите, что не существует многочлена от двух переменных $P(x, y)$, для которого множеством решений неравенства $P(x, y) > 0$ является квадрант $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$.

Л. Стунжас

Под квадрантом будем всегда понимать квадрант без границы. Так как в первом квадранте (и только там) многочлен положителен, то на границе этого квадранта он равен 0 (из непрерывности). Но тогда этот многочлен делится на xy (записав P в виде $P(x, y) = yQ(x, y) + R(x)$ и положив $y = 0$, получаем, что $R(x) \equiv 0$ при $x \geq 0$, то есть $P(x, y)$ делится на y; аналогично, он делится на x). Представим его в виде $P(x, y) = xyQ(x, y)$. Заметим, что знак $Q(x, y)$ совпадает со знаком $P(x, y)$ в первом и третьем квадрантах, и отличается — во втором и четвёртом. Так как $P(x, y)$ положителен в первом квадранте и неположителен в других квадрантах, то $Q(x, y)$ неотрицателен в первом, втором и четвёртом квадрантах, а в третьем квадранте — неположителен. Значит, он равен нулю на границе третьего квадранта, то есть тоже делится на xy, откуда $P(x, y) = (xy)^2 Q_1(x, y)$, и теперь знаки P и Q_1 уже совпадают во всех точках. Эти рассуждения можно продолжать до бесконечности, но степень P конечна. Значит, $P \equiv 0$, что противоречит условию задачи.

INTERNATIONAL MATHEMATICS TOURNAMENT OF TOWNS

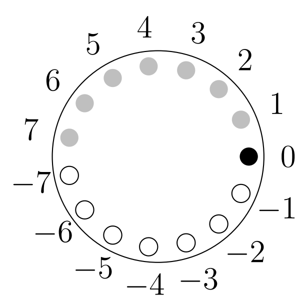
Junior O-Level, Spring 2014.

1. Each of given 100 numbers was increased by 1. Then each number was increased by 1 once more. Given that the first time the sum of the squares of the numbers was not changed find how this sum was changed the second time.

Solution. Given that the sum of the squares did not change when we added 1 to each number, we have $(a_1+1)^2+(a_2+1)^2+\cdots+(a_{100}+1)^2)-(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{100}^2)=0$ or $(2a_1+1)+(2a_2+1)+\cdots+(2a_{100}+1)=0$. Therefore, we have $a_1+a_2+\cdots+a_{100}=-50$. If we increase each number by 1 once more, the sum of squares will be change by $(a_1+2)^2+(a_2+2)^2+\cdots+(a_{100}+2)^2-(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{100}^2)=(4a_1+4)+(4a_2+4)+\cdots+(4a_{100}+4)=4\times(-50)+400=200$.

2. Mother baked 15 pasties. She placed them on a round plate in a circular way: 7 with cabbage, 7 with meat and one with cherries in that exact order and put the plate into a microwave. All pasties look the same but Olga knows the order. However she doesn't know how the plate has been rotated in the microwave. She wants to eat a pasty with cherries. Can Olga eat her favourite pasty for sure if she is not allowed to try more than three other pasties?

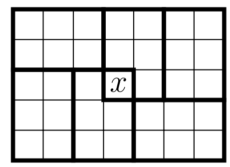
Solution. Denote the cherry pasty by 0, the cabbage pasties by 1,. . . , 7 and the meat pasties by $-1,\dots,-7$. If Olga does not get the cherry pasty on her first try, it must be either a cabbage pasty or a meat pasty. On her second try Olga takes the 4-th pasty from the first one in the direction of the cherry pasty. She gets either the cherry pasty 0, or the cabbage pasty 1,2,3, or the meat pasty $-1,-2,-3$.



On her last try Olga takes the second pasty from her second try in the direction of the cherry pasty and gets either the cherry pasty 0, or the cabbage pasty 1, or the meat pasty -1. Hence, after at most three tries Olga knows the position of the cherry pasty for sure.

3. The entries of a 7×5 table are filled with numbers so that in each 2×3 rectangle (vertical or horizontal) the sum of numbers is 0. For 100 dollars

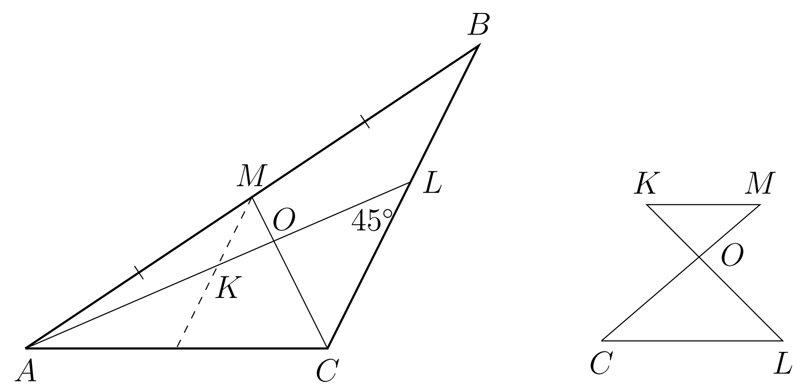
Peter may choose any single entry and learn the number in it. What is the least amount of dollars he should spend in order to learn the total sum of numbers in the table for sure?



Solution. Let S be a total sum of the numbers in the table. Let Peter divide the table into 6 rectangles as shown on the picture (two rectangles overlap on a marked entry). Then $S = 0 \times 5 + (0 - x)$ where x is the value in the marked entry he would pays for. Since a 7×5 table cannot be split into 2×3-rectangles without overlapping (or holes) Peter cannot find S for free.

4. Point L is marked on side BC of triangle ABC so that AL is twice as long as the median CM. Given that angle ALC is equal to $45°$ prove that AL is perpendicular to CM.

Solution.



(a) (b)

Let O be a point of intersection of KL and MC. Let K be a point of intersection of AL and a line drawn through M parallel to BC. Then $AK = KL$. Since MK is parallel to CL, triangles KMO and OLC are similar and we have $KO/(KL - KO) = MO/(MC - OM)$. Since $KL = MC$, $KO = OM$ and each of triangles OKM and OCL is isosceles and therefore $\angle OCL = \angle OLC = 45°$. Hence, $\angle COL = 90°$.

5. Ali Baba and the 40 thieves want to cross Bosporus strait. They made a line so that any two people standing next to each other are friends. Ali Baba is the first; he is also a friend with the thief next to his neighbour. There is a single boat that can carry 2 or 3 people and these people must be friends. Can Ali Baba and the 40 thieves always cross the strait if a single person cannot sail?

Solution. (Vassily Kapustin, grade 8, Poplar Bank P.S.) If the number of thieves n is even then A, T_1, T_2 sail to Europe, and A, T_1 sail back leaving T_2 in Europe. Then T_3, T_4 sail to Europe, T_2, T_3 sail back and now T_4 is in Europe and everybody else is in Asia. Continuing this process we end up with T_n (the last thief in line) in Europe, and $A, T_1, \ldots, T_{n-1}$ with the boat in Asia.

If the number of thieves n is odd then A, T_1, T_2 sail to Europe, and A, T_2 sail back leaving T_1 in Europe. Then T_2, T_3 sail to Europe, T_1, T_2 sail back and now T_3 is in Europe and everybody else is in Asia. Continuing this process we end up with T_n in Europe, and $A, T_1, \ldots, T_{n-1}$ with the boat in Asia.

We can see that after applying described operation the last thief in the line will be in Europe and all the remained gang in Asia. We are again in conditions of the original problem but the number of thieves decreased by 1. Therefore, we apply this process several times until we get only A, T_1, T_2 in Asia. Then the trio sail to Europe and join the gang.

INTERNATIONAL MATHEMATICS TOURNAMENT OF TOWNS

Senior O-Level, Spring 2014.

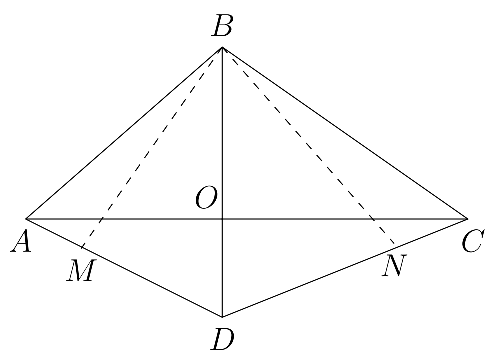
1. Inspector Gadget has 36 stones with masses 1 gram, 2 grams, ..., 36 grams. Doctor Claw has a superglue such that one drop of it glues two stones together (thus two drops glue 3 stones together and so on). Doctor Claw wants to glue some stones so that in obtained set Inspector Gadget cannot choose one or more stones with the total mass 37 grams. Find the least number of drops needed for Doctor Claw to fulfil his task.

ANSWER: 9

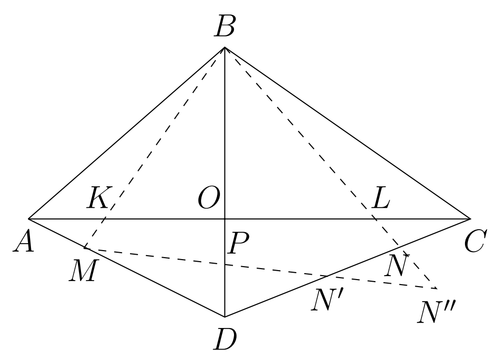
SOLUTION. (a) Among the given stones there are 18 stones with odd masses which could be split into 9 pairs. To glue stones in pairs Doctor Claw needs 9 drops. In new group of stones there is no stone with odd weight. Therefore, Inspector Gadget cannot fulfil his task.

(b) Let us split all stones into 18 pairs so that in each pair a total weight of stones is 37. Then Doctor Claw needs to "spoil" at least one stone in each pair which is impossible with less than 9 drops.

2. In a convex quadrilateral $ABCD$ the diagonals are perpendicular. Points M and N are marked on sides AD and CD respectively. Prove that lines AC and MN are parallel given that angles ABN and CBM are right angles.



(a)



(b)

SOLUTION 1. See Figure (b). Observe that $\angle BAC = \angle OBL$ and $\angle KBO = \angle BCA$. Then triangles KBO and OBC are similar, so $KO : OB = OB : OC$ and therefore $KO = OB^2/OC$. In similar way, $OL = OB^2/OA$. Hence

$$\frac{KO}{OL} = \frac{AO}{OC}. \tag{$*$}$$

Assume that MN is not parallel to AC. Through M draw a line parallel to AC and denote points P, N' and N'' on it as shown. Then triangles ADC and MDN' are similar and therefore $MP : PN' = AO : OC$. Comparing to $(*)$ we conclude that

$$\frac{KO}{OL} = \frac{MP}{PN'}. \tag{$**$}$$

Since triangles MBN'' and KBL are also similar, we have $KO : OL = MP : PN''$. Comparing to $(*)$ we conclude that $PN' = PN''$. Contradiction.

SOLUTION 2. Introducing Cartesian coordinates one can assume that $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $C(c, 0)$, $D(0, d)$ with $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$. Then MB is given by equation $cx - b(y - b) = 0$, and AD is given by equation $x/a + y/d = 1$. Solving the system we find y-coordinate of M: $y_M = (ac + b^2)d/(ac - bd)$. Permuting a and c we find $y_N = y_M$ which implies that $MN \parallel AC$.

3. Ali Baba and the 40 thieves want to cross Bosporus strait. They made a line so that any two people standing next to each other are friends. Ali Baba is the first; he is also a friend with the thief next to his neighbour. There is a single boat that can carry 2 or 3 people and these people must be friends. Can Ali Baba and the 40 thieves always cross the strait if a single person cannot sail?

SOLUTION. Let n be the number of the thieves (not counting Ali Baba). We will prove by induction that the gang can cross the strait. For $n = 1$ and 2 the base is obvious, one can check it for $n = 3$ as well. For simplicity of explanation we assume that they are going from Asia to Europe.

Assume that for any number $k = 1, 2, \ldots, n$ our statement holds. Denote Ali-Baba by A and the thieves by $T_1, \ldots, T_{n+1}$. First let $A, T_1, \ldots, T_{n-1}$ cross the strait leaving T_n, T_{n+1} behind in Asia (it can be done according to the induction hypotheses).

Next $A, T_1, \ldots, T_{n-2}$ sail back leaving T_{n-1} behind in Europe (again it can be done according to the induction hypotheses). Next T_n, T_{n+1} sail to Europe and then T_{n-1}, T_n go back bringing boat to Asia. Now $A, T_1, \dots, T_n$ are in Asia, so they cross the strait and join T_{n+1} .

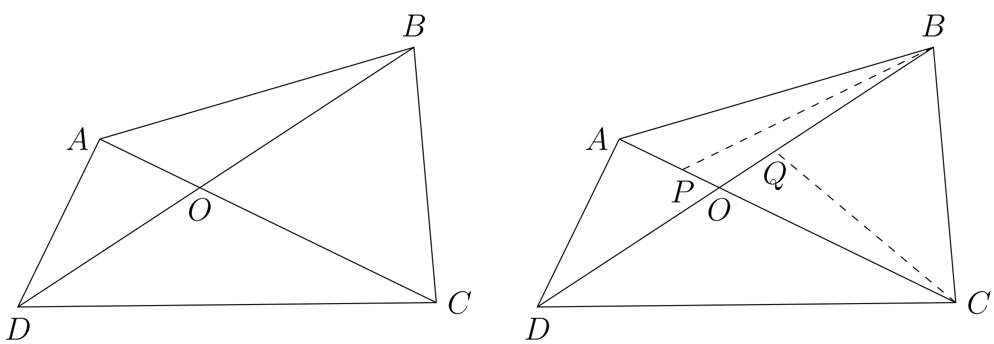
4. Positive integers a, b, c, d are pairwise coprime and satisfy the equation

$$ab + cd = ac - 10bd.$$

Prove that one can always choose three numbers among them such that one number equals the sum of two others.

SOLUTION. Rewriting the equation in a form $a(c-b) = (10b+c)d$ and given that a and d are coprime we conclude that $(c-b)$ is positive and divisible by d: $c = b + dx$ with $x > 0$. Plugging c into latter equation and simplifying we get $(a-d)x = 11b$. Since c and b are coprime, x and b are also coprime and therefore either $x = 1$ or $x = 11$. In the former case we have $c = b + d$ and in the latter case $a = b + d$.

5. Park's paths go along sides and diagonals of the convex quadrilateral $ABCD$. Alex starts at A and hikes along $AB - BC - CD$. Ben hikes along AC; he leaves A simultaneously with Alex and arrives to C simultaneously with Alex. Chris hikes along BD; he leaves B at the same time as Alex passes B and arrives to D simultaneously with Alex. Can it happen that Ben and Chris arrive at point O of intersection of AC and BD at the same time? The speeds of the hikers are constant.



(a) (b)

SOLUTION (Michael Chow, grade 12, Albert Campbell C.I.) Let v_A, v_B, v_C be the speeds of Alex, Ben and Chris respectively. Let Alex and Ben start hiking at time 0. By triangle inequality $AB + BC > AC$, so Alex traveled a further distance than Ben in the same time interval as they started and finished simultaneously. Hence $v_A > v_B$. Similarly $BC + CD > BD$ so Alex traveled a further distance than Chris in the same time interval. Hence $v_A > v_C$.

Assume that Ben and Chris arrive to O at the same time. Then we can replace them with a single person Mikey who travels from B to O with speed v_B and from O to C with speed v_C while Alex travels from B to C in the same time interval. Mikey's speed is always less than Alex's speed but Mikey travels distance $BO + OC$ which is greater than BC. This is impossible. Therefore, Ben and Chris cannot arrive at O at the same time.

Solution 2 (Frieda Rong, grade 11, Marc Garneau C.I.; Gloria Fang, grade 11, U.T.S). See Figure (b). Let P be a point where Ben was when both Alex and Chris were in B. Since speeds of Alex and Ben are constant and Ben arrive to C at the same time as Alex, we have $AB : BC = AP : PC$ and therefore BP is a bisector of $\angle ABC$.

Let Q be a point where Chris was when Alex and Ben arrived in C. Similarly $BQ : QD = BC : BD$ so CQ is a bisector of $\angle BCD$. Observe that Ben and Chris cannot arrive at O simultaneously unless P belongs to AO and Q belongs to OD.

Assume that Ben and Chris arrived to O simultaneously. Then $PO : OC = BO : OQ$ and since $\angle POB = \angle COQ$ we conclude that triangles BOB and COQ are similar. Then $\angle PBC + \angle BCQ = 180°$ and since BP and CQ are bisectors, $\angle ABC + \angle BCD = 360°$ which is impossible.

INTERNATIONAL MATHEMATICS TOURNAMENT OF TOWNS
Junior A-Level Paper, Spring 2014.

1. During Christmas party Santa handed out to the children 47 chocolates and 74 marmalades. Each girl got 1 more chocolate than each boy but each boy got 1 more marmalade than each girl. What was the number of the children?

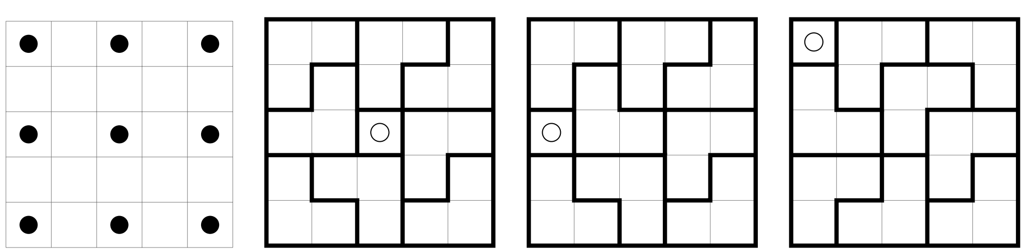
Solution. Each child got the same number of treats and the total number of treats is $74 + 47 = 121$. Therefore there could be either (a) 11 children, or (b) 121, or (c) just 1 child, and each child got 11, 1, or 121 treat respectively.

Remark. In case (a) let x denote the number of boys and c the number of chocolates each girl got. Then $(c-1)x + c(11-x) = 47$ or $11c = 47 + x$. The only integer solution with $0 \leq x \leq 11$ is $x = 8$, $c = 5$ (so, 8 boys, 3 girls). In case (b) each boy got just 1 marmalade, and each girl got just 1 chocolate (so, 74 boys and 47 girls). Case (c) is correct from the point of view of formal logic.

2. Peter marks several cells on a 5×5 board. Basil wins if he can cover all marked cells with three-cell corners. The corners must be inside the board and not overlap. What is the least number of cells Peter should mark to prevent Basil from winning? (Cells of the corners must coincide with the cells of the board).

Solution. If Peter marks 9 points as shown on (a) Basil cannot cover them. Indeed, no corner can cover more than one marked cell, so Basil needs 9 corners; but they contain 27 cells while the whole board contains only 25.

If Peter marks 8 cells Basil can cover all of them. Indeed, one of the cells shown on (a) is not marked. However the remaining 24 cells could be covered as shown on (b)–(d).

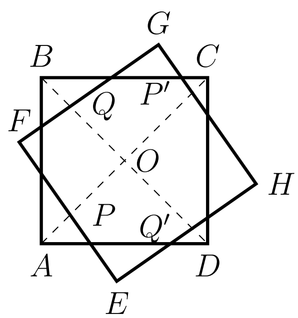


(a) (b) (c) (d)

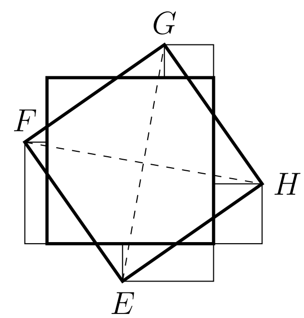
3. A square table is covered with a square cloth (may be of a different size) without folds and wrinkles. All corners of the table are left uncovered and all four hanging parts are triangular. Given that two adjacent hanging parts are equal prove that two other parts are also equal.

SOLUTION 1. Let $ABCD$ be a cloth and $EFGH$ be a table (see Figure (a)). We see four hanging parts of the cloth and four triangular parts of the table which are not covered. Observe that all eight triangles are similar. Let us draw diagonals in $ABCD$. Observe that they are bisectors of the corresponding angles. Observe that since angles between AC and $FG \parallel EH$ and BD and $FE \parallel EH$ are equal and distances between two pairs of parallel lines are also equal then $QQ' = PP'$.

If triangles A and B are equal then their bisectors AP and BQ are equal and since $AO = BO = CO = DO$ we see that $PO = QO$. But then $P'O = Q'O$ and $P'C = Q'D$. Then triangles C and D are also equal.



(a)



(b)

SOLUTION 2 (see Figure (b)). We define the *weight* of the hanging triangle as its height dropped from the right corner. Obviously all hanging parts are similar. Therefore parts are equal if and only if their heights are equal. Therefore it is sufficient to prove that the the sums of wights of opposite parts are equal. Adding to these sums the side of the table we get projection of diagonal FH to the "horizontal" side of the the table and of diagonal EG to the "vertical" side of the the table. Since diagonals are equal and orthogonal and the sides of the table are orthogonal, we conclude that projections are equal.

4. The King called two wizards. He ordered First Wizard to write down 100 positive integers (not necessarily distinct) on cards without revealing them to Second Wizard. Second Wizard must correctly determine all these integers, otherwise both wizards will lose their heads. First Wizard is allowed to provide Second Wizard with a list of distinct integers, each of which is either one of the integers on the cards or a sum of some of these integers. He is not allowed to tell which integers are on the cards and which integers are their sums. Finally the King tears as many hairs from each wizard's beard as the number of integers in the list given to Second Wizard. What is the minimal number of hairs each wizard should lose to stay alive?

Solution [Coincides with given by Ben Wei]. The first wizard writes $1, 2, 4, \dots, 2^{99}$ and lists all these numbers and their sum $2^{100} - 1$. Then the second wizard understands that there is a card with a number not exceeding 1, there is another card with a number not exceeding 2, ..., and there is 100th card with a number not exceeding 2^{99}. Then their sum does not exceed $2^{100} - 1$ and the emuality is possible if and only if numbers are $1, 2, 4, \dots, 2^{99}$.

5. There are several white and black points. Every white point is connected with every black point by a segment. Each segment is equipped with a positive integer. For any closed circuit the product of the numbers on the segments passed in the direction from white to black point is equal to the product of the numbers on the segments passed in the opposite direction. Can one always place the numbers at each point so that the number on each segment is the product of the numbers at its ends?

Solution. Let us denote white points W_j, $j = 1, 2, \dots, m$ and black points B_k, $k = 1, 2, \dots .n$. Let c_{jk} be a label on the segment from white point W_j to black point B_k. Consider closed circuit $W_1 - B_1 - W_j - B_k - W_1$. Then $c_{11}c_{jk} = c_{j1}c_{1k}$ and therefore $c_{jk} = c_{j1}c_{1k}/c_{11} = w_j b_k$ where $w_j = c_{j1}/d$, $b_k = c_{1k}d/c_{11}$, $d = \gcd(c_{11}, c_{21}, \dots, c_{m1})$. Obviously $w_1, \dots, w_m$ are integers and coprime. Since $w_j b_k$ are integers and $w_1, \dots, w_m$ are coprime, then b_k are integers as well.

Indeed, let b_k be not an integer, then represent it as irreducible ratio $b_k = b'/r$ with $r \geq 2$. Since $w_j b_k = w_j b'/r$ are integers r must divide w_j ofr all j which is impossible as these numbers are coprime.

6. A $3 \times 3 \times 3$ cube is made of $1 \times 1 \times 1$ cubes glued together. What is the maximal number of small cubes one can remove so the remaining solid has the following features:

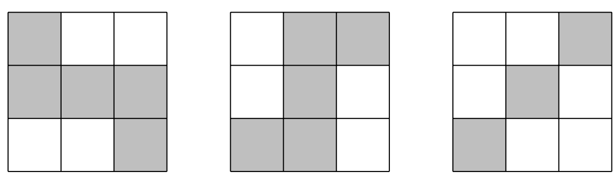
1) Projection of this solid on each face of the original cube is a 3×3 square;

2) The resulting solid remains face-connected (from each small cube one can reach any other small cube along a chain of consecutive cubes with common faces).

Answer: 14 small cubes.

Solution. Consider example with removed 14 cubes (remaining 13 cubes are shaded on these 3 layers). Each layer has cubes in each row and column; imposing layers we get a full square. Therefore the first condition is fulfilled. Top and middle layers are glued together through their central cubes. Each cube of the bottom layer is glued to the corresponding cube of the middle layer.

To prove that no more than 14 cubes could be removed we prove an estimate for the number n of remaining cubes. We can see from all 6 directions $6 \cdot 9$ of their faces. To connectivity one needs at least $(n-1)$ gluings ; therefore we do not see at least $2(n-1)$ faces, whole the total number of faces is $6n$. Then $6n \geq 2(n-1) + 54$ and therefore $n \geq 13$.

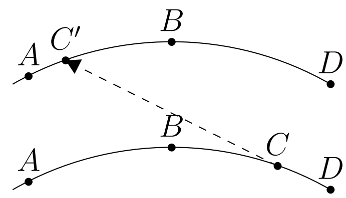


(a) Top (b) Middle (c) Bottom

7. Points A_1, A_2, …, A_{10} are marked on a circle clockwise. It is known that these points can be divided into pairs of points symmetric with respect to the centre of the circle. Initially at each marked point there was a grasshopper. Every minute one of the grasshoppers jumps over its neighbour along the circle so that the resulting distance between them doesn't change. It is not allowed to jump over any other grasshopper and to land at a point already occupied. It occurred that at some moment nine grasshoppers were found at points A_1, A_2, …, A_9 and the tenth grasshopper was on arc $A_9A_{10}A_1$. Is it necessarily true that this grasshopper was exactly at point A_{10}?

Answer. Yes.

Solution. 10 grasshoppers divide circle into 10 arcs. Let us paint alternatively black and white. Originally sums of the lengths of white and black arcs are equal because for any white arc an arc which is symmetric to it with respect to the center is black and conversely for any black arc an arc which is symmetric to it with respect to the center is white.



It follows from the figure that the grasshopper's jump does not change these sums. Indeed, sum of arcs AC' and BD equals to the sum of arcs AB and CD. In the final configuration we know 4 black arcs and know where the fifth is located and therefore position of 10th grasshopper is defined uniquely. On the other hand, A_{10} satisfies to the sums of black and white arcs are equal condition.

INTERNATIONAL MATHEMATICS TOURNAMENT OF TOWNS
Senior A-Level Paper, Spring 2014.

1. Doono wrote several **1**s, placed signs "+" or "×" between every two of them, put several brackets and got 2014 in the result. His friend Dunno replaced all "+" by "×" and all "×" by "+" and also got 2014. Can this be true?

SOLUTION. Yes, it could be true. For example, consider the following expression consisting of 4027 **1**s:

$$1+\underbrace{1\times 1+1\times 1+\ldots+1\times 1}_{\text{2013 terms}}$$

which obviously equals 2014. After Dunno changed signs it became

$$\underbrace{1\times 1+1\times 1+\ldots+1\times 1}_{\text{2013 terms}}+1$$

which also equals 2014.

2. Is it true that any convex polygon can be dissected by a straight line into two polygons with equal perimeters and

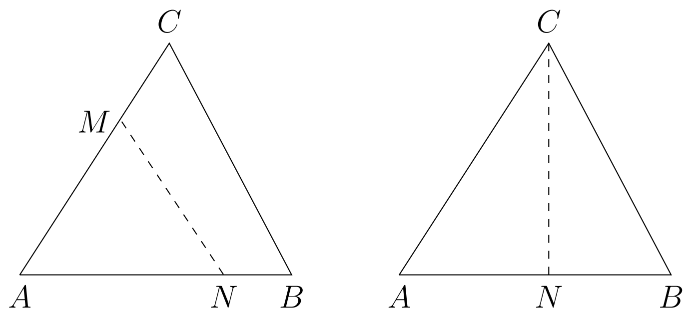
(a) equal greatest sides?

(b) equal smallest sides?

(a) ANSWER: Yes

SOLUTION. Consider a convex polygon polygon and point M on its boundary. Consider its opposite point $N=N(M)$. It means that MN dissects polygon into two $MA_1\ldots A_mN$ and $NA_{m+1}\ldots A_nM$ with equal perimeters (it is possible that M and N are among vertices of the original polygon). Here $MA_1\ldots A_mN$ is in the counterclockwise direction. Define $f(M)$ as a greatest side of $MA_1\ldots A_mN$. Observe that $f(M)$ continuously depends on M. Then $g(M)=f(M)-f(N(M))$ also continuously depends on M. However as M changes from original point M_0 to its opposite point N_0, $g(M)$ changes from $g(M_0)$ to $g(N_0)=-g(M_0)$. Therefore $g(M)=0$ for some M.

Remark. $h(M)$ as the smallest side of $MA_1\ldots A_mN$ is not continuous and these arguments do not work for Part (b).



(a) (b)

(b) Answer: No.

Consider triangle ABC. We call points M and N opposite if (as on the figure (a)) $MA + AN = p/2$ where $p = a + b + c$ is a perimeter of ABC.

Consider first an equilateral triangle with sides $a = b = c$. We claim that the smallest cut between opposite points has the length $3a/4$. Indeed, one can prove easily that the shortest cut MN must be orthogonal to bisector of angle CAB.

Therefore in an equilateral triangle $MN \geq 3a/4$ and $MC + NB = a/2$, $AM = NB + a/2$, $AN = CM + a/2$ and therefore for equilateral triangle the answer is negative unless the cut passes through one of the vertices. The same is true for all triangles sufficiently close to equilateral.

Consider $M = C$. But then in CAN and CNB the smallest sides are $AN = p/2 - b = (a - b + c)/2$ and $NB = (a + b - c)/2$ where $a = BC$, $b = AC$ and $c = AB$ and $AN \neq NB$ if $b \neq c$.

Therefore one cannot dissect any triangle which is close to equilateral but has all sides different.

3. The King called two wizards. He ordered First Wizard to write down 100 positive real numbers (not necessarily distinct) on cards without revealing them to Second Wizard. Second Wizard must correctly determine all these numbers, otherwise both wizards will lose their heads. First Wizard is allowed to provide Second Wizard with a list of distinct numbers, each of which is either one of the numbers on the cards or a sum of some of these numbers. He is not allowed to tell which numbers are on the cards and which numbers are their sums. Finally the King tears as many hairs from each wizard's beard as the number of numbers in the list given to Second Wizard. What is the minimal number of hairs each wizard should lose to stay alive?

ANSWER. 101

SOLUTION [Coincides with given by Ben Wei]. The first wizard writes $1, 2, 4, \ldots, 2^{99}$ and lists all these numbers and their sum $2^{100} - 1$. Then the second wizard understands that there is a card with a number not exceeding 1, there is another card with a number not exceeding 2, ..., and there is 100th card with a number not exceeding 2^{99}. Then their sum does not exceed $2^{100} - 1$ and the emuality is possible if and only if numbers are $1, 2, 4, \ldots, 2^{99}$.

4. In the plane are marked all points with integer coordinates (x, y), $0 \le y \le 10$. Consider a polynomial of degree 20 with integer coefficients. Find the maximal possible number of marked points which can lie on its graph.

SOLUTION (Michael Chow) (i) We need to consider integer solutions of the system of inequalities:

$$0 \le P(x) \le 10. \qquad (*)$$

Let us prove by contradiction that there are no more than 20 integer solutions to $(*)$. Assume that $x_1 < x_2 < \ldots < x_{21}$ satisfy $(*)$; denote $a = x_1$, $b = x_{21}$; then $b - a \ge 20$.

Consider $P(b) - P(a)$; since both a, b satisfy $(*)$ we conclude that $|P(b) - P(a)| \le 10$. However since $P(x)$ has integer coefficient, the number $P(b)-P(a)$ must be divisible by $(b - a)$ (indeed, $P(b) - P(a) = (b - a)R(a, b)$ where R is a polynomial with integer coefficients). Since $|P(b) - P(a)| \le 10$ and $b - a \ge 20$ divisibility implies that $P(b) - P(a) = 0$. So $P(a) = P(b) = c$ with $0 \le c \le 10$.

Then $P(x) = (x - a)(b - x)Q(x) + c$ where $Q(x)$ is a polynomial of degree 18. Observe that $(x - a)(b - x) \ge 19$ for integer $x = a + 1, \ldots, b - 1$. Then $P(x)$ cannot satisfy $(*)$ unless $Q(x) = 0$. Indeed, if $Q(x) \ne 0$ then either $P(x) \le -19 + c < 0$ or $P(x) \ge 19 + c > 10$.

Therefore $Q(x_k) = 0$, $k = 2, \ldots, 20$ but polynomial $Q(x)$ of degree 18 cannot have more than 18 roots. Contradiction.

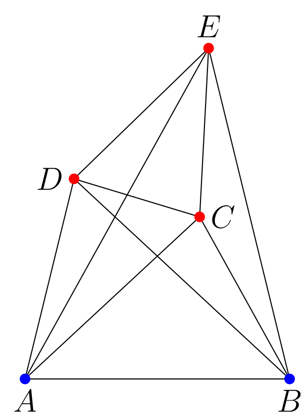
(ii) On the other hand, for $P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{20})$ $(*)$ has 20 solutions $x_1, \ldots, x_{20}$.

SOLUTION 2. We need to consider integer solutions of the system of inequalities $(*)$. Let us prove by contradiction that there are no more than 20 integer solutions to $(*)$. Assume that $x_1 < x_2 < \ldots < x_{21}$ satisfy $(*)$. By Bézout's theorem $P(x_{21} - P(x_1)$ is divisible by $x_{21} - x_1 \geq 20$ and therefore $P(x_{21} = P(x_1) = r$. Similarly $P(x_{21}) = P(x_i) = r$ for all $i = 2, \ldots, 10$ since $x_{21} - x_i \geq 11$. Also $P(x_1) = P(x_k) = r$ for all $k = 12, \ldots, 21$ since $x_k - x_1 \geq 11$. Therefore all x_j except x_{11} are roots of $P(x) - r$ and thus $P(x) = a(x - x_1) \cdots (x - x_{10})(x - x_{12}) \cdots (x - x_{21}) + r$. But then $|P(x_{12}) - r| \geq (10!)^2$ which is a contradiction.

5. There is a scalenetriangle. Peter and Basil play the following game. On each his turn Peter chooses a point in the plane. Basil responds by painting it into red or blue. Peter wins if some triangle similar to the original one has all vertices of the same colour. Find the minimal number of moves Peter needs to win no matter how Basil would play (independently of the shape of the given triangle)?

Answer. 5

Solution. Peter selects triangle ABC (an original one). Basil paints A and B blue and C red. Then Peter selects D and E on the same side of AB as C so that triangles ABC, BDA and EAB are similar (with vertices in the matching order). Basil is forced to paint them red.



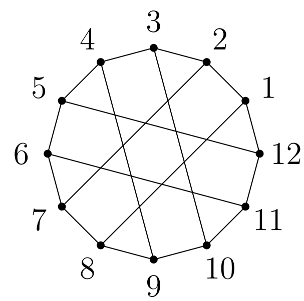
Now prove that triangle EDC and EAB are similar. Observe that $\angle DAE = \angle CBE$. Indeed, $\angle DAE = \angle DAB - \angle EAD$ and $\angle CBE = \angle ABE - \angle ABC$ and those angles are equal due to similarity. Also $DA : BC = AB : CA = EA : BE$.

Thus triangles DAE and CBE are similar and in triangles EDC and EAB angles E are equal and $DE : CE = AE : BE$ and therefore they are similar.

Remark. This could be described using complex numbers terminology. Indeed, let us introduce coordinate system on the complex plane $\mathbb{C}$ such that points C, A and B correspond to complex numbers 0, z and z^2 respectively (it is always possible). Let us add points $w(E)$ $wz(D)$ with $w = z^2 - z + 1$. Then triangles CAB, ABD, BEA CED are similar. Indeed triangles CAB and CED could be obtained from triangle Δ with vertices $(0, 1, z)$ by multiplication by z and w respectively; triangle BEA could be obtained from Δ by multiplication by $(1-z)$ and shift by z^2, and triangle ABD could be obtained from Δ by multiplication by $z^2 - z$ and shift by z.

6. In some country every town has a unique number. In a flight directory for any two towns there is an indication whether or not they are connected by a direct non-stop flight. It is known that for any two assigned numbers M and N one can change the numeration of towns so that the town with number M gets the number N but the directory remains correct.

Is it always true that for any two assigned numbers M and N one can change the numeration of towns so that the towns with numbers M and N interchange their numbers but the directory is still correct?



ANSWER: No
SOLUTION. Observe that figure is symmetric with respect to each diameter passing through the middle of the small chord. These symmetries allows us to interchange neighbouring towns and then several symmetries allows us to transfer any town into any other town.

Assume that we can exchange towns 1 and 3. Then their only common connected town 2 must remain on its place. Then its connected town 9 must also remain on its place. But 3 and 9 have two common connected towns (8 and 2) while 1 and 9 have only one common connected town (2).

Remark. Another example: tetrahedron with cut vertices. Then there is a graph with 12 vertices and 18 edges which has the same properties.

7. Consider a polynomial $P(x)$ such that

$P(0) = 1; \quad (P(x))^2 = 1 + x + x^{100}Q(x),$ where $Q(x)$ is also a polynomial.

Prove that in the polynomial $(P(x)+1)^{100}$ the coefficient at x^{99} is zero.

SOLUTION. Observe that $(P(x)+1)^{100} + (1-P(x))^{100}$ contains only even powers of $P(x)$ and therefore is a polynomial of degree 50 of $(P(x))^2$ i.e. of $(1+x)^{50}$ modulo polynomial divisible by x^100. However $1 - P(x)$ is divisible by x and therefore $(1-P(x))^{100}$ is divisible by x^{100}.

Remark. More generally $(P(x)+1)^n$ is a polynomial of degree $\lfloor n/2 \rfloor$ modulo polynomial divisible by x^n and therefore coefficients at x^m, $m = \lfloor n/2 \rfloor + 1, \ldots, n-1$ are zeros.

International Mathematics
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior O-Level Paper Solutions **Fall 2013**

1 [**3**] In a wrestling tournament, there are 100 participants, all of different strengths. The stronger wrestler always wins over the weaker opponent. Each wrestler fights twice and those who win both of their fights are given awards. What is the least possible number of awardees?

Answer: 1.

Solution. Arrange participants by strength a_1 (the weakest), $a_2, a_3, \dots a_{100}$ (the strongest).

Obviously, a_{100} is one of the winners. Let wrestlers in the first round be paired as follows: $a_{100} - a_{99}$, $a_{98} - a_{97}$,..., $a_2 - a_1$, then $a_1, a_3, a_5, \dots a_{99}$ are losers.

Let the second round be paired as follows: $a_{100} - a_1$, $a_{99} - a_{98}$,..., $a_3 - a_2$, then $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{98}$ are losers. Therefore the only participant who won in both rounds is a_{100}.

2 [**4**] Does there exist a ten-digit number such that all its digits are different and after removing any six digits we get a composite four-digit number?

Answer: yes.

Solution. Observe that a four-digit number 1379 is divided by 7 ($1379 = 7 \times 197$) We can consider a ten-digit number in the form $1379\dots$ where the tail is any combination of remaining digits $2, 4, 6, 8, 0, 5$. It is easy to see that this number satisfies the conditions: the remaining four digits form either 1379, either an even four-digit number, or a four-digit multiple of 5.

3 [**4**] Denote by (a, b) the greatest common divisor of a and b. Let n be a positive integer such that

$$(n, n+1) < (n, n+2) < \dots < (n, n+35). \qquad (1)$$

Prove that $(n, n+35) < (n, n+36)$.

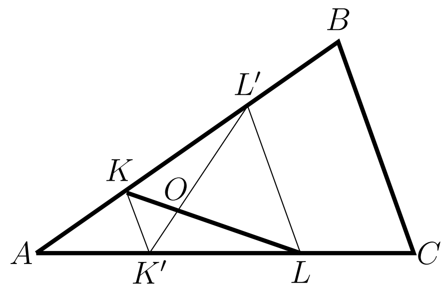
Solution. First we need

Lemma. $(n, n+m) \leq m$.

Proof. Indeed, if p divides both n and $(n+m)$ it also divides their difference which is m. □

Since $(n, n+1) = 1$ and $(n, n+k)$ increases for $k = 1, \dots, 35$ then this lemma implies that for all $m = 1, \dots, 35$ we have $(n, n+m) = m$ and therefore n is divisible by m. In particular n is divisible by both 4 and 9 and therefore it is divisible by 36. Then $n+36$ is also divisible by 36 and $(n, n+36) = 36 > (n, n+35) = 35$.

4 [5] Let ABC be an isosceles triangle. Points K and L are chosen on lateral sides AB and AC respectively so that $AK = CL$ and $\angle ALK + \angle LKB = 60°$. Prove that $KL = BC$.



Solution. Let us mark points K' and L' on sides AC and AB respectively so that $AK' = AK$ and $L'B = LC$. Since triangle ABC is isosceles, the lines KK', LL' and BC are parallel. Let $AB = AC = b$, $AK = LC = a$, $BC = c$, $KK' = s$ and $LL' = t$.

Note that triangles AKK', ALL' and ABC are similar. Therefore we have $s/c = a/b$ and $t/c = (b - a)/b$.

Because of symmetry, triangles KOK' and OLL' are isosceles ($LO = LO'$ and $KO = K'O$) and since $60° = \angle ALK + \angle LKB = \angle ALK + \angle L'K'C$ we have $\angle LOL' = KOK' = 60°$. This implies that triangles KOK' and OLL' are equilateral. Finally, $KL = KO + OL = s + t = c(a/b + (b - a)/b) = c = BC$.

5 [6] Eight rooks are placed on a chessboard so that no two rooks attack each other. Prove that one can always move all rooks, each by a move of a knight so that in the final position no two rooks attack each other as well. (In intermediate positions several rooks can share the same square).

Solution. Observe that condition "no two rooks attack one another" means exactly that

(a) Each horizontal has 1 rook,

(b) Each vertical has 1 rook.

We break movement into two steps:

Step 1: Rooks from verticals 1,2,5,6 move 2 squares right – to verticals 3,4,7,8 respectively; rooks from verticals 3,4,7,8 move 2 squares left – to verticals 1,2,5,6 respectively. Obviously both conditions (a), (b) remains fulfilled.

Step 2: Rooks from horizontals 1,3,5,7 move 1 square up – to horizontals 2,4,7,8; rooks from horizontals 2,4,7,8 move 1 square down – to horizontals 1,3,5,7 respectively Obviously both conditions (a), (b) remains fulfilled.

As a result each rook made a knight's move.

International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior O-Level Paper Solutions **Fall 2013**

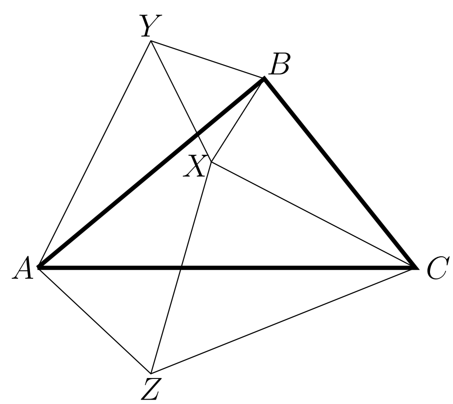
1 [**3**] Does there exist a ten-digit number such that all its digits are different and after removing any six digits we get a composite four-digit number?

ANSWER: yes.

SOLUTION. Observe that a four-digit number 1379 is divided by 7 ($1379 = 7 \times 197$) We can consider a ten-digit number in the form $1379\dots$ where the tail is any combination of remaining digits $2, 4, 6, 8, 0, 5$. It is easy to see that this number satisfies the conditions: the remaining four digits form either 1379, either an even four-digit number, or a four-digit multiple of 5.

2 [**4**] On the sides of triangle ABC, three similar triangles are constructed with triangle YBA and triangle ZAC in the exterior and triangle XBC in the interior. (Above, the vertices of the triangles are ordered so that the similarities take vertices to corresponding vertices, for example, the similarity between triangle YBA and triangle ZAC takes Y to Z, B to A and A to C). Prove that $AYXZ$ is a parallelogram.

SOLUTION. Draw the following figure



For simplicity of notations let us denote: $\angle BAC = a$, $\angle ABC = b$, $\angle ACB = c$. Further, using similarity of triangles YBA, ZAC, and XBC let us denote

$$\angle YAB = \angle ZCA = \angle XCB = \alpha,$$
$$\angle YBA = \angle ZAC = \angle XBC = \beta$$

and

$$\angle AYB = \angle CZA = \angle CXB = \gamma.$$

Since triangle YBA is similar to triangle XBC we have $YB : AB = XB : BC$. It follows that $YB : BX = AB : BC$. Since $\angle YBA = \angle XBC$ we have $\angle YBX = b$.

Therefore triangle YBX is similar to triangle ABC. It implies that $\angle XYB = a$ while $\angle YXB = c$.

Since triangle ZAC is similar to triangle XBC, in a similar way we can show $ZC : XC = AC : BC$. Since $\angle ZCX = c$, triangle ZXC is similar to triangle ABC. Then $\angle XZC = a$ while $\angle ZXC = b$.

It implies that that:

$$\angle AYX = \angle AYB - \angle XYB = \gamma - a,$$

and

$$\angle AZX = \angle AZC - \angle XZC = \gamma - a$$

and therefore one pair of opposite angles of quadrilateral $AYXZ$ is equal. Further,

$$\angle YXZ = 360^\circ - \angle YXB - \angle ZXC - \angle BXC = 360^\circ - c - b - \gamma = \\ (180^\circ - c - b) + (180^\circ - \gamma) = a + \alpha + \beta = \angle YAZ$$

and therefore, the other pair of opposite angles of quadrilateral $AYXZ$ is equal.

Hence quadrilateral $AYXZ$ is a parallelogram.

3 [4] Denote by $[a, b]$ the least common multiple of a and b. Let n be a positive integer such that

$$[n, n+1] > [n, n+2] > \cdots > [n, n+35]. \tag{2}$$

Prove that $[n, n+35] > [n, n+36]$.

Solution. Let (n, m) denote the least common multiple of n and m. Then $(n, m) = nm/[n, m]$ and since $n(n+1) < n(n+2) < \cdots < n(n+35)$ we conclude from (2) that

$$(n, n+1) < (n, n+2) < \cdots < (n, n+35). \tag{3}$$

holds.

Then $(n, n+m) = m$ as $m = 1, \ldots, 36$,

$$[n, n+35] = n(n+35)/35 = n^2/35 + n$$

and

$$[n, n+36] = n(n+36)/36 = n^2/36 + n$$

and the latter is obviously smaller than the former.

4 [5] Eight rooks are placed on a chessboard so that no two rooks attack each other. Prove that one can always move all rooks, each by a move of a knight so that in the final position no two rooks attack each other as well. (In intermediate positions several rooks can share the same square).

SOLUTION. Observe that condition "no two rooks attack one another" means exactly that

(a) Each horizontal has 1 rook,

(b)Each vertical has 1 rook.

Break movement into two steps:

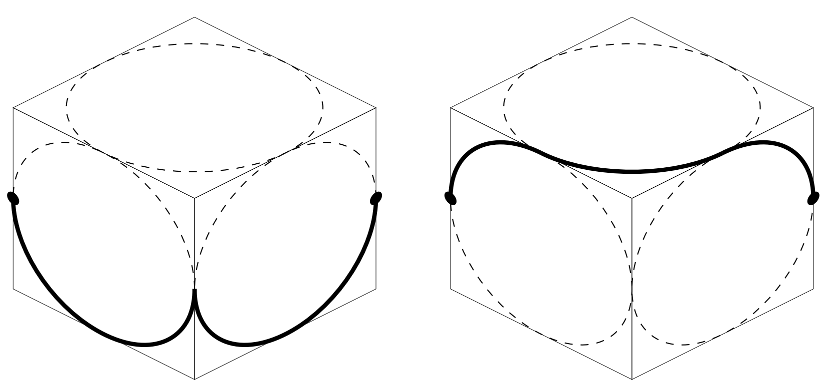
Step 1: Rooks from verticals 1,2,5,6 move 2 squares right – to verticals 3,4,7,8 respectively; rooks from verticals 3,4,7,8 move 2 squares left – to verticals 1,2,5,6 respectively. Obviously both conditions (a), (b) remains fulfilled.

Step 2: Rooks from horizontals 1,3,5,7 move 1 square up – to horizontals 2,4,7,8; rooks from horizontals 2,4,7,8 move 1 square down – to horizontals 1,3,5,7 respectively Obviously both conditions (a), (b) remains fulfilled.

As a result each rook made a knight's move.

5 [6] A spacecraft landed on an asteroid. It is known that the asteroid is either a ball or a cube. The rover started its route at the landing site and finished it at the point symmetric to the landing site with respect to the center of the asteroid. On its way, the rover transmitted its spatial coordinates to the spacecraft on the landing site so that the trajectory of the rover movement was known. Can it happen that this information is not sufficient to determine whether the asteroid is a ball or a cube?

SOLUTION. Consider a sphere of radius r and a surface of cube with the side a with the same center. Observe that if $a = \sqrt{2}r$ the sphere touches each edge at its midpoint and therefore it intersects each face of the cube along circle of radius $r/\sqrt{2}$ in its center like on the figure below (we draw only three visible faces):



Then any path consisting of arcs of these circles belongs to both sphere and the surface of the cube and one can connect two symmetric points marked on the figure by such path. Therefore *it can happen that such information is not sufficient to determine whether the asteroid is a ball or a cube.*

International Mathematics

TOURNAMENT OF THE TOWNS

Junior A-Level Solutions **Fall 2013**

1. There are 100 red, 100 yellow and 100 green sticks. One can construct a triangle using any three sticks all of different colour. Prove that there is a colour such that one can construct a triangle using any three sticks of this colour.

Solution. For each of three colours (a, b,and c) consider two smallest sticks and the largest stick and denote these (x_1, x_2, x) respectively. Assume that there is no such colour that one can always construct a triangle using any three sticks of this colour. This implies: $x_1 + x_2 \leq x$. Without loss of generality assume that $a_1 \leq b_1 \leq c_1$. Then $a_1 + b_1 \leq c_1 + c_2 \leq c$.

Contradiction: one cannot construct a triangle using any three sticks all of different colours.

2. A math teacher chose 10 consequent positive integers and submitted them to Pete and Basil. Each boy should split these numbers in pairs and calculate the sum of products of numbers in pairs. Prove that the boys can pair the numbers differently so that the resulting sums are equal.

Solution. Let consecutive numbers be in the form $n+1, n+2, n+3, \dots, n+10$. One can check that $P_1 = P_2$, where

$$P_1 = (n+1)(n+8) + (n+2)(n+7) + (n+3)(n+6) \\ + (n+4)(n+5) + (n+9)(n+10)$$

and

$$P_2 = (n+1)(n+10) + (n+2)(n+3) + (n+4)(n+5) \\ + (n+6)(n+7) + (n+8)(n+9).$$

3. Assume that C is a right angle of triangle ABC and N is a midpoint of the semicircle, constructed on CB as on diameter externally. Prove that AN divides the bisector of angle C in halves.

Solution. Extend segment BN to intersect line AC at some point K. In triangle BCK the altitude CN is also a bisector, thus $KN = NB$. Angles BCL and CBK are equal to $45°$, hence the bisector CL is parallel to BK. Therefore in triangle ABK the median AN bisects CL as well.

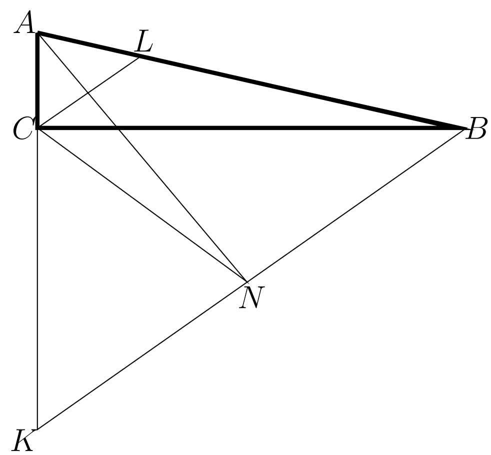
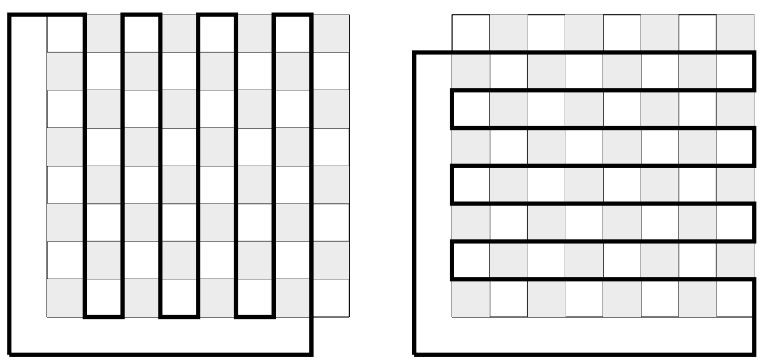


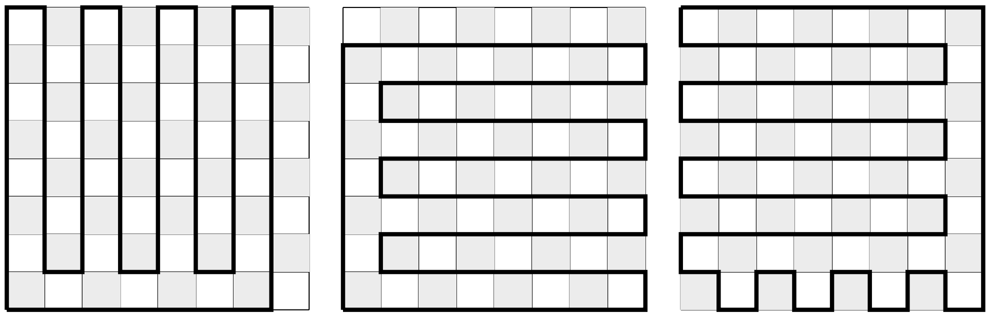
Figure 1: To Problem 3

4. Pete drew a square in the plane, divided it into 64 equal square cells and painted it in a chess board fashion. He chose some cell and an interior point in it. Basil can draw any polygon (without self-intersections) in the plane and ask Pete whether the chosen point is inside or outside this polygon. What is the minimal number of questions sufficient to determine whether the chosen point is black or white?



Solution 1. One question is not enough because a polygon containing all white points and no black point has to be self-intersecting. However two questions are enough: if a point belongs to just one polygon then it is white, and if a point belongs to both or none then it is black.

Solution 2 [Nikita Kapustin, gr. 11, Richmond Hill H.S.]. If the point is outside of the Polygon 1 then it is confined to verticals 2,4,6,8 and we determine the colour by drawing Polygon 2b.



(a) Polygon 1 (b) Polygon 2b (c) Polygin 2c

Figure 2: To problem 4

If the point is inside of the Polygon 1 then it is confined either to verticals 1,3,5,7 or to horizontal 1 and we determine the colour drawing Polygon 2c: it contains horizontals 2,4,6,8 and only white squares from horizontal 1. Therefore if the point is inside of Polygon 2c it is in a white square; if the point is outside of Polygon 2c it is in a black square.

5. A 101-gon is inscribed in a circle. From each vertex of this polygon a perpendicular is dropped to the opposite side or its extension. Prove that at least one perpendicular drops to the side.

Solution. We call 50 consecutive arcs a *train*. Train is *long* if its total measure is at least $180°$, otherwise it is *short*.

If none of the perpendiculars from vertices to the opposite sides lands inside of the edge (vertices excluded!), then

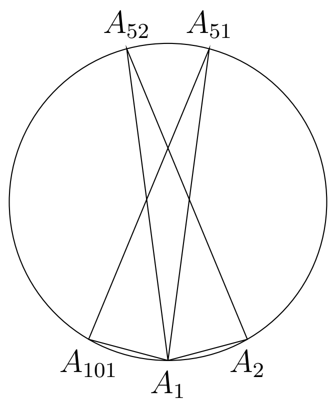
(*) Out of two disjoint (not having common arcs) trains one must be long (and another short).

Indeed, if two disjoint trains ($\overset{\frown}{AB}$ and $\overset{\frown}{AC}$ are short then the in the triangle ABC angles $\angle B$ and $\angle C$ are acute and a perpendicular dropped from A to the opposite edge BC land inside BC.

However for each train there are two trains disjoint from it: for a long train there are two short trains and for a short train due to (*) there are two long trains. Then moving long train in any direction by one arc we have a long train again. Then all trains must be long. Contradiction.

Solution 2 [Jennifer Guo, gr. 10, Marc Garneau C.I.].

Assume that the perpendicular from any vertex of polygon drops to the extension of the opposite side. Then in every *main triangle* (i.e. trianle



formed by some side and two diagonals connecting its ends to the opposite vertex) one of base angles must be either obtuse or right.

Consider triangle $A_{101}A_{51}A_1$ and assume that $\angle A_{51}A101A_1 \geq 90°$; then supporting arc $(A_{51}A_2A_1) \geq 180°$. Consider adjacent triangle $A_1A_{52}A_2$ and observe that $\angle A_{52}A_2A_1 < 90°$. Indeed, otherwise supporting arc $(A_{52}A_{101}A_1) \geq 180°$. However together arcs $(A_{51}A_2A_1)$ and $(A_{52}A_{101}A_1)$ are less than $360°$.

Therefore in virtue of our assumption $\angle A_{52}A_1A_2 \geq 90°$. Repeating these arguments we conclude that $\angle A_{53}A_2A_3 \geq 90°$ and so on. In other words, each counter-clockwise arc $(A_1A_{51}), (A_2A_{52}), (A_3A_{53}), \ldots, (A_{51}A_{101})$ is at least $180°$. But we know that $(A_{51}A_{101})$ is less than $180°$. Contradiction.

6. The number

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

is represented as an irreducible fraction. If $3n+1$ is a prime number, prove that the numerator of this fraction is a multiple of $3n+1$.

Solution [Jennifer Guo, gr. 10, Marc Garneau C.I.]. Observe that if $3n+1$ is prime then n is even (otherwise $3n+1$ is even and greater than 2).

Let us rewrite the sum (denote it by Σ) as

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)$$
$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Here we have n terms and since n is even we can pair them

$$\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{2n-1}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\frac{3}{2}n}+\frac{1}{\frac{3}{2}n+1}\right)$$
$$=\frac{3n+1}{(n+1)(2n)}+\frac{3n+1}{(n+2)(2n-1)}+\ldots+\frac{3n+1}{(\frac{3}{2}n)(\frac{3}{2}n+1)}=\frac{(3n+1)p}{q}$$

where p/q is irreducible and equal to $\frac{1}{(n+1)(2n)}+\frac{1}{(n+2)(2n-1)}+\ldots+\frac{1}{(\frac{3}{2}n)(\frac{3}{2}n+1)}$. Obviously q and $(3n+1)$ are coprime as $(3n+1)$ is prime and all prime factors of q do not exceed $2n < 3n+1$. Therefore $(3n+1)p/q$ is also an irreducible fraction with the numerator divisible by $(3n+1)$.

7. On a table, there are 11 piles of ten stones each. Pete and Basil play the following game. In turns they take 1, 2 or 3 stones at a time: Pete takes stones from any single pile while Basil takes stones from different piles but no more than one from each. Pete moves first. The player who cannot move, loses. Which of the players, Pete or Basil, can guarantee a victory regardless of the opponent's play?

Solution. Let us position stones as on the picture so that piles correspond to columns. Peter must take several stones from one column and Basil must take them from different columns. Basil' strategy is to make moves symmetric to those of Peter with respect to empty diagonal. Since a row symmetric to a column has no common stones with it, Basil can each time restore the broken symmetry, so he always has a move. Since the number of stones is finite, eventually Peter loses.

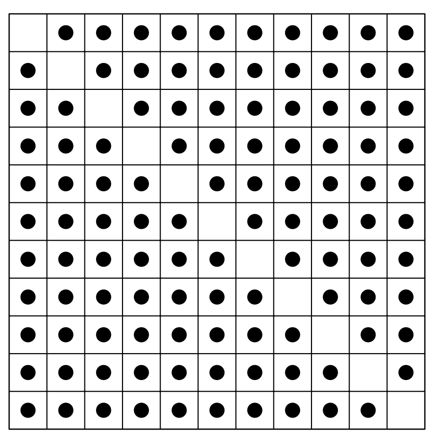


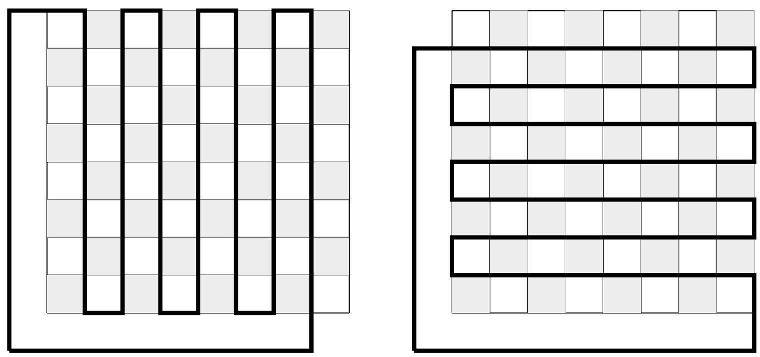
Figure 3

International Mathematics

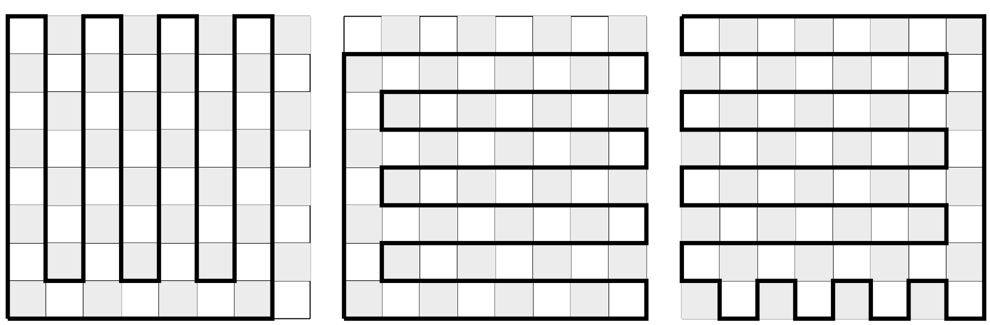
TOURNAMENT OF THE TOWNS

Senior A-Level Solutions **Fall 2013**

1. Pete drew a square in the plane, divided it into 64 equal square cells and painted it in a chess board fashion. He chose some cell and an interior point in it. Basil can draw any polygon (without self-intersections) in the plane and ask Pete whether the chosen point is inside or outside this polygon. What is the minimal number of questions sufficient to determine whether the chosen point is black or white?



Solution 1. One question is not enough because a polygon containing all white points and no black point has to be self-intersecting. However two questions are enough: if a point belongs to just one polygon then it is white, and if a point belongs to both or none then it is black.



(a) Polygon 1 (b) Polygon 2b (c) Polygin 2c

Solution 2 [Nikita Kapustin, gr. 11, Richmond Hill H.S.]. If the point is outside of the Polygon 1 then it is confined to verticals 2,4,6,8 and we determine the colour by drawing Polygon 2b.

If the point is inside the Polygon 1 then it is confined either to verticals 1,3,5,7 or to horizontal 1 and we determine the colour drawing Polygon 2c: it contains horizontals 2,4,6,8 and only white squares from horizontal 1. Therefore if the point is inside Polygon 2c it is in a white square; if the point is outside Polygon 2c it is in a black square.

2. Find all positive integers n for which the following statement holds:

For any two polynomials $P(x)$ and $Q(x)$ of degree n there exist monomials ax^k and bx^ℓ, $0 \le k, \ell \le n$, such that the graphs of $P(x)+ax^k$ and $Q(x)+bx^\ell$ have no common points.

Answer: All even integers n and $n = 1$.

Solution. The statement can be reformulated as: "for any polynomial $R(x)$ with $\deg R \le n$ there exist monomials ax^k and bx^ℓ with $0 \le k < \ell \le n$ such that the $R(x) + ax^k + bx^\ell$ has no 0."

Let $n \ge 3$ be odd. Then for $R(x) = x^n + x$ we must pick up $bx^\ell = -x^n$ (otherwise we have a polynomial of odd degree which has a 0). We have $R(x) - x^n = x$ and if $k \ge 1$ then $R(x) + bx^\ell + ax^k$ is 0 as $x = 0$; if $k = 0$ we have $x + a$ which has 0 as well.

For $n = 1$ we can always make $R(x) + bx + a \equiv 1$ which does not vanish.

Let n be even. Then add a monomial of degree n to make the leading coefficient positive. The resulting polynomial is bounded from below by some M. Adding the constant $1 - M$, we make the minimal value equal to 1 and get the required polynomial.

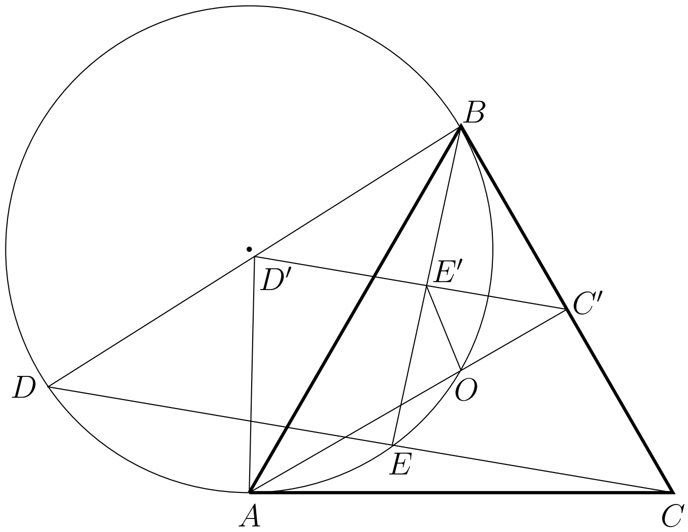
3. Let ABC be an equilateral triangle with centre O. A line through C meets the circumcircle of triangle AOB at points D and E. Prove that points A, O and the midpoints of segments BD, BE are concyclic.

Solution. Let C' be the midpoint of BC, and E be between C and D. Let E' be the midpoint of BE; then E' belongs to midline $C'D'$ of the triangle CBD.

In the equilateral triangle ABC vertex A, center O and point C' are collinear. The angle ABC is equal to the half of arc AOB and therefore BC is a tangent line of the circumcircle of triangle AOB.

Then

$$C'E' \cdot C'D' = \frac{1}{4} CE \cdot CD = \frac{1}{4} CB^2 = C'B^2 = C'O \cdot C'A.$$



By Intersecting Chord Theorem if quadrilateral $AOE'D'$ was cyclic then this equality would hold. However converse statement is also true: since this equality holds, this quadrilateral is cyclic.

4. Is it true that every integer is a sum of finite number of cubes of distinct integers?

Solution. Observe that

$$(n+7)^3-(n+6)^3-(n+5)^3+(n+4)^3-(n+3)^3+(n+2)^3+(n+1)^3-n^3=48.$$

On the other hand, $(48k+1)^3$ for any k is comparable with 1 modulo 48. Summing up such cubes we obtain sums with all possible residues on division by 48 and then, adding or subtracting a suitable number of combinations equal to 48 and formed of distinct integers we get any integer with the same residue.

5. Do there exist two integer-valued functions f and g such that for every integer x we have

(a) $f(f(x))=x, \quad g(g(x))=x, \quad f(g(x))>x, \quad g(f(x))>x$?

(b) $f(f(x))<x, \quad g(g(x))<x, \quad f(g(x))>x, \quad g(f(x))>x$?

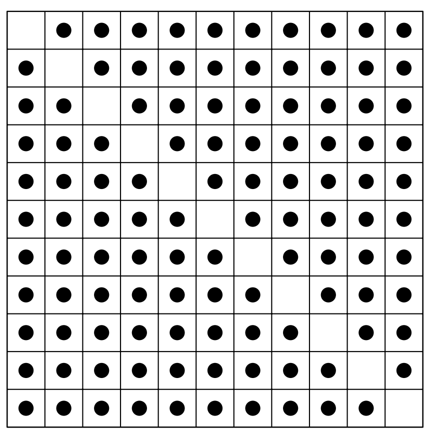
Solution: (a) Such functions do not exist. Indeed, $f(f(x))=x \implies g(f(f(x))=g(x)$, but $g(f(f(x))>f(x)$ so $g(x)>f(x)$. Similarly $f(x)>g(x)$. A contradiction.

(b) Solution. Such functions exist. For instance, call even integers *associated with function f* and odd ones *associated with function g*.

Let these functions map any associated x to $-|x| - 2$ and any other x to $|x| + 1$. Observe that all values of each function are associated with it. Clearly $|f(x)| > |x|$, hence $f(f(x)) = -|f(x)| < -|x| - 2 < x$ and $g(f(x)) = |f(x)| + 1 > |x| + 1 > x$. The remaining two inequalities are checked in the same way.

6. On a table, there are 11 piles of ten stones each. Pete and Basil play the following game. In turns they take 1, 2 or 3 stones at a time: Pete takes stones from any single pile while Basil takes stones from different piles but no more than one from each. Pete moves first. The player who cannot move, loses. Which of the players, Pete or Basil, can guarantee a victory regardless of the opponent's play?

Solution. Let us position stones as on the picture so that piles correspond to columns. Peter must take several stones from one column and Basil must take them from different columns. Basil' strategy is to make moves symmetric to those of Peter with respect to empty diagonal. Since a row symmetric to a column has no common stones with it, Basil can each time restore the broken symmetry, so he always has a move. Since the number of stones is finite, eventually Peter loses.



7. A closed broken self-intersecting line is drawn in the plane. Each of the links of this line is intersected exactly once and no three links intersect at the same point. Further, here are no self-intersections at the vertices and no two links have a common segment. Can it happen that every point of self-intersection divides both links in halves?

Answer: no.

Solution. First, we need a following

Theorem. *A closed piecewise smooth line with simple self-intersections (no tangency between links – which automatically holds for broken lines; no multiple intersections in the same point, no intersections in the vertices) divides a plane into several regions which can "chess like" painted so that the parts of the same colour have no common segments of the boundary.*

Proof. We can assume that the line contains no vertical segments (otherwise we achieve this by turning by some angle). Consider a point M not on the line and let us consider a vertical ray from M upward. We call the region R *even* if for point M in R such ray intersects the line even number of times and *odd* otherwise.

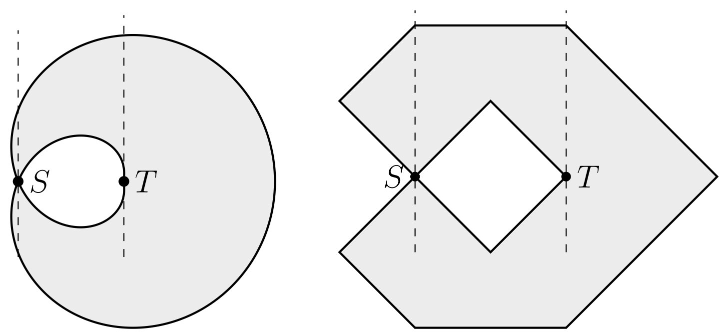


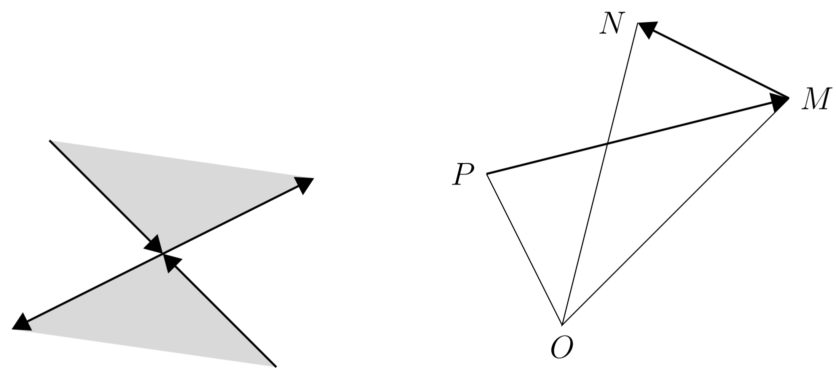
Figure 4: S is a point of self-intersection, T is a point of tangency.

To justify this definition we need to prove that it does not depend on the position of M in R, but it is true: indeed, if we move inside R up along the ray, the number of intersections does not change. If we move M inside R horizontally then this number can change when the ray passes through a point of self-intersection or tangency; it can pass simultaneously through several such points, but each of such changes brings either 0 or ± 2 so that evenness does not change.

Now if we move up or down into adjacent region this number changes by ± 1. Therefore we can colour each even region into white and each odd region into black. $\square$

Now, after this theorem is proven let us consider the broken line which divides plane into several regions which are coloured according to the theorem and assume that an unbounded region is white.

Let us consider segments of the broken line (half-links) such that if two links AB and CD intersect in S then we consider separately AS, BS, CS, DS. Let us orient such links so that each black region R is counterclockwise oriented. Observe that AS and BS should have opposite orientations (*):

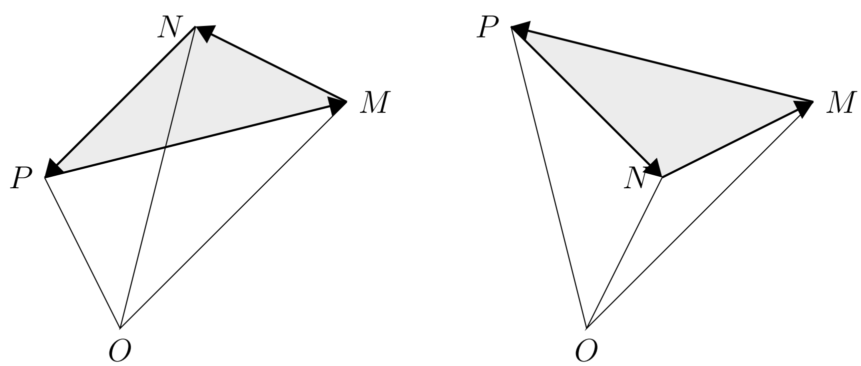


(a) (b)

Figure 5: Orientation (a) and Oriented area (b): Oriented area of OMN is positive and of OPM is negative.

Let us select point O and for all segments MN let us consider the *oriented area* of OMN (orientation is due to orientation of MN – the area is positive if the vector MN is seen from O counterclockwise and negative otherwise).

Let us sum up oriented areas over all segments. Calculating sums in black regions, for each black region we get its area (since it is counterclockwise oriented). Indeed, if a black region is a triangle, it is obvious:



(a) (b)

Figure 6: Sum of oriented areas of OMN, ONP and OPM equals area of MNP.

If black region is a n-gon, we prove it by induction. Assume that for $m < n$ it is true. We can cut n-gon $M_1 M_2 \ldots M_n$ by some diagonal, say, $M_1 M_m$ into m-gon $M_1 \ldots M_m$ and $n-m+2$-gon $M_1 M_m \ldots M_n$; both of them are counterclockwise oriented and each area equals to the sum of oriented areas of triangles. Adding we get the sum of oriented areas of troangles $O\overrightarrow{M_k M_{k+1}}$ with $k = 1, \ldots n$ ($M_{n+1} = M_1$) plus oriented areas of $O\overrightarrow{M_1 M_m}$ and $O\overleftarrow{M_1 M_m}$ which cancel one another.

So the total sum equals the total area of black regions and is positive.

On the other hand, each vector enters in the total sum together with the opposite one in virtue of (*) and therefore total sum must be 0. A contradiction.