ДВАДЕСЕТ ДРУГИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло. Припремна варијанта, 22. oktобар 2000.
8-9 разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени задаци

1. У поља таблице 4x4 уписани су бројеви, тако да је сума
3 суседа сваког броја једнака 1 (суседним се сматрају поља која имају заједничку страницу). Наћи суму свих бројева у таблици.

2. Дати су: $ABCD$ - паралелограм, M - средиште странице
3 CD, H - подножје нормале спуштене из темена B на праву AM. Доказати да је троугао BCH једнакокрак.

3. а) На табли је написано 100 различитих бројева. Дока-
2 зати да се међу њима може одабрати 8 бројева, тако да њихова аритметичка средина не може да се представи у облику аритметичке средине никојих 9 од бројева написаних на табли.
2 б) На табли је написано 100 бројева. Познато је да се за свахих осам од тих бројева могу наћи таквих девет од тих бројева, да аритметичка средина тих осам бројева буде једнака аритметичкој средини тих девет бројева. Доказати да су сви бројеви једнаки.

4. Зна се да се у скупу од 32 новчића који су једнаког
5 облика налазе два неисправна новчића, који се од осталих разликују по тежини (исправни новчићи су једнаки по тежини међу собом, а неисправни новчићи су такође једнаки по тежини међу собом). Како поделити све новчиће на две гомиле једнаких тежина, а да се обави не више од 4 мерења на теразијама без тегова?

ДВАДЕСЕТ ДРУГИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло. Припремна варијанта, 24. октобар 2000.
10–11 разред (старији узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени задаци

3 1. Троугао ABC је уписан у кружницу. Кроз тачку A су конструисане тетиве које секу страницу BC у тачкама K и L и лук BC у тачкама M и N. Ако око четвороугла $KLNM$ може да се опише кружница, доказати да је троугао ABC једнакокрак.

3 2. Природни бројеви a, b, c, d су такви да је $ad-bc>1$. Доказати да бар један од бројева a, b, c, d није дељив са $ad-bc$.

4 3. Свака бочна страна петоугаоне призме има угао једнак φ (међу својим угловима). Наћи све могуће вредности φ.

4. Зна се да се у скупу од
3 а) 32
2 б) 22 новчића који су једнаког облика налазе два неисправна новчића, који се од осталих разликују по тежини (исправни новчићи су једнаки по тежини међу собом, а неисправни новчићи су такође једнаки по тежини међу собом). Како поделити све новчиће на две гомиле једнаких тежина, а да се обави не више од 4 мерења на теразијама без тегова?

ДВАДЕСЕТ ДРУГИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло. Основна варијанта, 29. октобар 2000.
8-9 разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена.)

поени	задаци
3	1. Дата је таблица $n{\times}n$ у чије је свако поље уписан број, при чему су сви бројеви у таблици различити. У свакој врсти је обележен најмањи број и испоставило се да се сви обележени бројеви налазе у различитим колонама. Затим је у свакој колони обележен најмањи број и испоставило се да се сви обележени бројеви налазе у различитим врстама. Доказати да су оба пута обележени исти бројеви.
3	2. Међу двема паралелним правама постављени су кружница полупречника 1, која додирује обе праве, и једнакокраки троугао, чија основица лежи на једној од правих а врх на другој. Познато је да троугао и кружница имају тачно једну заједничку тачку и да та тачка лежи на уписаној кружници троугла. Наћи полупречник уписане кружнице троугла.
4	3. Природни бројеви a, b, c, d су такви да је најмањи заједнички садржалац тих бројева једнак $a+b+c+d$. Доказати да је $abcd$ дељиво са 3 или са 5 (или и са једним и са другим).
4	4. Разматра се шаховска табла 8×8 чија поља нису обојена. На колико се начина може обојити табла црном и белом бојом, тако да буде 31 црно поље и да никоја два црна поља немају заједничку страницу? (Навести број начина и доказати да су урачунати сви начини; два начина бојења се сматрају различитим ако се може наћи поље које је при једном од тих начина бојења бело, а при другом - црно).
6	5. На десном тасу теразија лежи терет од 11111 г. Лице које мери редом ставља на тасове тегове, од којих први има масу 1 г., а сваки следећи је дупло тежи од претходног. У неком моменту теразије су дошле у равнотежу. На који тас је стављен тег од 16 г?
7	6. У пролећном колу турнира градова 2000. године ученицима старијих разреда земље N било је постављено 6 задатака. Сваки задатак је решило тачно 1000 ученика, али никоја два ученика нису решили заједно свих шест задатака. Који је најмањи могући број ученика земље N који су учествовали у пролећном колу? (Навести тај број, показати да за наведени број учесника услов задатка може бити испуњен и да за мањи број учесника он не може бити испуњен.)
8	7. Ђак првак има сто карата на којима су написани природни бројеви од 1 до 100, а такође и већу залиху знакова "+" и "=". Колики је највећи број тачних једнакости које он може да састави? (Свака карта може да се искористи највише један пут, у свакој једнакости може бити само један знак "=", карте се не могу превртати и слепљивати ради добијања нових бројева.)

ДВАДЕСЕТ ДРУГИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло. Основна варијанта, 29. октобар 2000.
10-11 разред (старији узраст)
(Поени за сваку тачку су дати у угластим заградама; резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају.)

---

1. [3] Природни бројеви a, b, c, d су такви да је најмањи заједнички садржалац тих бројева једнак $a+b+c+d$. Доказати да је $abcd$ дељиво са 3 или са 5 (или и са једним и са другим).

2. [4] За које највеће n је могуће изабрати на површи коцке n тачака, тако да не леже све на једној страни коцке и да при том буду темена правилног (равног) n-тоугла.

3. [4] Дужине страница троугла ABC једнаке су a, b и c ($AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ и $a<b<c$). На полуправама BC и AC означене су редом тачке B_1 и A_1, такве да је $BB_1=AA_1=c$. На полуправама CA и BA означене су редом тачке C_2 и B_2, такве да је $CC_2=BB_2=a$. Наћи однос дужи A_1B_1 према дужи C_2B_2.

4. Нека су a_1, a_2, ... , a_n цели бројеви различити од нуле, такви да једнакост

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{x}}}} = x$$

важи за све вредности x које улазе у област дефинисаности разломка који се налази на левој страни једнакости.

а) [3] Доказати да је број n паран.

б) [4] За које најмање n такви бројеви постоје?

5. [6] Поља табле $m\times n$ су обојена са две боје. Познато је да ће топ постављен на било које поље тући више поља не оне боје на којој стоји (сматра се да топ туче поље на коме стоји). Доказати да се на свакој вертикали и свакој хоризонтали налази једнако много поља обе боје.

6. а) [5] Неколико црних квадрата странице 1 cm приковани су на белу раван ексером дебљине 0,1 cm. Формирана је многоугаона црна фигура. Може ли обим те фигуре бити већи од 1 km? (Ексер не додирује руб квадрата.)

б) [5] Решити исти задатак, под претпоставком да је дебљина ексера једнака 0 (т. ј. да је попречни пресек ексера тачка).

в) [5] Неколико црних квадрата странице 1 cm који леже на белој равни формирају многоугаону црну фигуру (могуће је да се она састоји од неколико делова и да има рупе). Може ли однос обима те фигуре према њеној површини бити већи од 100000?

Припремна варијанта

8–9. разред:

1. У поља таблице 4×4 уписани су бројеви, тако да је сума суседа сваког броја једнака 1 (суседним се сматрају поља која имају заједничку страницу). Наћи суму свих бројева у таблици.

2. Дати су паралелограм $ABCD$, M–средиште странице CD, H– подножје нормале спуштене из темена B на праву AM. Доказати да је троугао BCH једнакокрак.

3. (а) На табли је написано 100 различитих бројева. Доказати да се међу њима може изабрати 8 бројева, тако да њихова аритметичка средина не може да се представи у облику аритметичке средине никојих 9 од бројева написаних на табли.

   (б) На табли је написано 100 целих бројева. Познато је да се за сваких осам од тих бројева могу наћи таквих девет од тих бројева, да аритметичка средина тих осам бројева буде једнака аритметичкој средини тих девет бројева. Доказати да су сви бројеви једнаки.

4. Зна се да се у скупу од 32 новчића који су једнаког облика налазе два неисправна новчића, који се од осталих разликују по тежини (исправни новчићи су једнаки по тежини међу собом, а неисправни новчићи су такође

једнаки по тежини међу собом). Како поделити све новчиће на две гомиле једнаких тежина, а да се обави не више од 4 мерења на теразијама без тегова?

10–11. разред:

5. Троугао ABC је уписан у кружницу. Кроз тачку A су конструисане тетиве које секу страницу BC у тачкама K и L и лук BC у тачкама M и N. Ако око четвороугла $KLMN$ може да се опише кружница, доказати да је троугао ABC једнакокрак.

6. Природни бројеви a, b, c и d су такви да је $ad - bc > 1$. Доказати да бар један од бројева a, b, c и d није дељив са $ad - bc$.

7. Свака бочна страна петостране призме има угао једнак φ (међу својим угловима). Наћи све могуће вредности φ.

8. Зна се да се у скупу од

   (а) 32

   (б) 22 новчића који су једнаког облика налазе два неисправна новчића, који се од осталих разликују по тежини (исправни новчићи су једнаки по тежини међу собом, а неисправни су такође једнаки по тежини међу собом). Како поделити све новчиће на две гомиле једнаких тежина, а да се обави не више од 4 мерења на теразијама без тегова?

Основна варијанта

8–9. разред:

9. Дата је таблица $n \times n$ у чије је свако поље уписан број, при чему су сви бројеви у таблици различити. У свакој врсти је обележен најмањи број и испоставило се да се сви обележени бројеви налазе у различитим колонама. Затим је у свакој колони обележен најмањи број и испоставило се да се сви обележени бројеви налазе у различитим врстама. Доказати да су оба пута обележени исти бројеви.

10. Међу двема паралелним правама постављени су кружница полупречника 1, која додирује обе праве, и једнакокраки троугао, чија основица лежи на једној од правих, а врх на другој. Познато је да троугао и кружница имају тачно једну заједничку тачку и да та тачка лежи на уписаној кружници троугла. Наћи полупречник уписане кружнице троугла.

11. Природни бројеви a, b, c и d су такви да је најмањи заједнички садржалац тих бројева једнак $a + b + c + d$. Доказати да је $abcd$ дељиво са 3 или са 5 (или и са једним и са другим).

12. Разматра се шаховска табла 8×8 чија поља нису обојена. На колико се начина може обојити табла црном и белом бојом, тако да буде 31 црно поље и да никоја два црна поља немају заједничку страницу: (Навести број начина и доказати да су урачунати сви начини; два начина бојења се сматрају различитм ако се може наћи поље које је при једном од тих начина бојења бело, а при другом – црно.)

13. На десном тасу теразија лежи терет од 11111 грама. Лице које мери редом ставља на тасове тегове, од којих први има масу 1 грам, а сваки следећи је дупло тежи од претходног. У неком моменту теразије су дошле у равнотежу. На који тас је стављен тег од 16 грама?

14. У пролећном колу Турнира градова 2000. године ученицима старијих разреда земље N било је постављено 6 задатака. Сваки задатак је решило тачно 1000 ученика, али никоја два ученика нису решили заједно свих шест задатака. Који је најмањи могући број ученика земље N који су учествовали у пролећном колу? (Навести тај број, показати да за наведени број учесника услов задатка може бити испуњен и да за мањи број учесника он не може бити испуњен.)

15. Ђак првак има сто карата на којима су написани природни бројеви од 1 до 100, а такође и већу залиху знакова "+" и "=". Колики је највећи број тачних једнакости које он може да састави? (Свака карта може да се искористи највише један пут, у свакој једнакости може бити само један знак "=", карте се не могу превртати и слепљивати ради добијања нових бројева.)

10–11. разред:

16. Природни бројеви a, b, c и d су такви да је најмањи заједнички садржалац тих бројева једнак $a+b+c+d$. Доказати да је $abcd$ дељиво са 3 или са 5 (или и са једним и са другим).

17. За које највеће n је могуће изабрати на површи коцке n тачака, тако да не леже све на једној страни коцке и да при том буду темена правилног (равног) n–угла?

18. Дужине страница троугла ABC једнаке су a, b и c ($AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ и $a < b < c$). На полуправама BC и AC означене су редом тачке B_1 и A_1, такве да је $BB_1 = AA_1 = c$. На полуправама CA и BA означене су редом тачке C_2 и B_2, такве да је $CC_2 = BB_2 = a$. Наћи однос дужи A_1B_1 према C_2B_2.

19. Нека су a_1, a_2,..., a_n цели бројеви различити од нуле, такви да једнакост

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots \cfrac{1}{a_n + \frac{1}{x}}}} = x$$

важи за све вредности x које улазе у област дефинисаности разломка који се налази на левој страни једнакости.

(а) Доказати да је број n паран.

(б) За које најмање n такви бројеви постоје?

20. *Поља табле* $m \times n$ *су обојена* са две боје. *Познато* је да ће топ постављен на било које поље тући више поља не оне боје на којој стоји (сматра се да топ туче оно поље на коме стоји). Доказати да се на свакој вертикали и свакој хоризонтали налази једнако много поља обе боје.

21. (а) Неколико црних квадрата странице 1 cm приковани су на белу раван ексером дебљине 0,1 cm. Формирана је многоугаона црна фигура. Може ли обим те фигуре бити већи од 1 km? (Ексер не додирује руб квадрата.)

(б) Решити исти задатак, под претпоставком да је дебљина ексера једнака 0 (тј. да је попречни пресек ексера тачка).

(в) Неколико црних квадрата странице 1cm који леже на белој равни формирају многоугаону црну фигуру (могуће је да се она састоји од неколико делова и да има рупе). Може ли однос обима те фигуре према њеној површини бити већи од 100000?

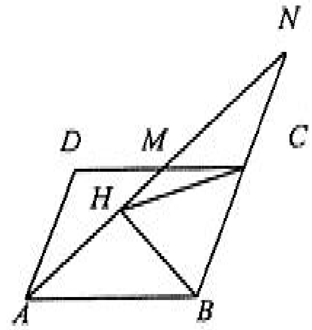
Решења задатака

1. Поља таблице поделимо у шест дисјунктних скупова као на слици 1. Тада је, на основу услова задатка, збир бројева у сваком од добијених скупова једнак 1, па је сума свих бројева у таблици једнака 6.

1	*2*	*1*	*2*
3	*1*	*2*	*4*
5	*3*	*4*	*6*
3	*5*	*6*	*4*

Сл. 1

2. Нека је N тачка на полуправој BC таква да је C средиште дужи BN (сл. 2).



Сл. 2

Лако се показује да су тачке A, M и N колинеарне, па је троугао BHN правоугли са правим углом код темена H. Како је, по конструкцији C средиште хипотенузе BN, то је $CH = CB$ (полупречник описане кружнице), па је троугао BCH једнакокраки.

3. (а) Будући да су сви бројеви написани на табли међусобно различити, могуће их је уредити у строго растући низ $a_1 < a_2 < \ldots < a_{99} < a_{100}$.

Претпоставимо супротно, тј. нека за сваких осам бројева постоји девет међу датим бројевима тако да је аритметичка средина осам изабраних бројева једнака аритметичко средини одговарајућих девет бројева. Тада за a_{93}, $a_{94}, \ldots, a_{100}$ постоје $a_{i_1}, \ldots, a_{i_9}$, $i_1, \ldots, i_9 \in \{1, \ldots, 100\}$, тако да је

$$\frac{a_{93} + \cdots + a_{100}}{8} = \frac{a_{i_1} + \cdots + a_{i_9}}{9}.$$

Међутим, тада је

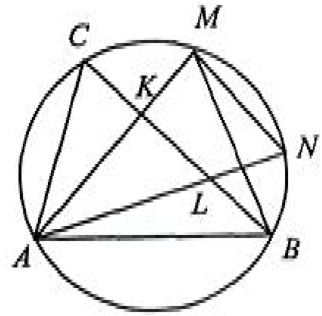
$$9(a_{93} + \cdots + a_{100}) = 8(a_{i_1} + \cdots + a_{i_9}),$$

и важи $9(a_{93} + \cdots + a_{100}) \leq 8(a_{92} + a_{93} + \cdots + a_{100})$, тј. $a_{93} + \cdots + a_{100} \leq 8a_{92}$, што је немогуће, због почетног уређења. Дакле, наша претпоставка је била погрешна, па важи тврђење задатка.

4. Види решење 8. задатка.

5. Приметимо, прво, да важи $\angle BAN = \angle BMN$ (периферијски углови над ис-

том тетивом). Из истих разлога је $\angle AMB = \angle ACB$ (слика 3).



Сл. 3

Сада је $\angle KMN = \angle KMB + \angle BMN = \angle AMB + \angle BMN$. Четвороугао $KLMN$ је тетиван, па следи једнакост углова $\angle KMN$ и $\angle ALK$.

С друге стране, $\angle ALK$ је спољашњи угао троугла ABL и као такав једнак збиру несуседних унутрашњих, тј.

$$\angle BAN + \angle ACB = \angle ALK = \angle LAB + \angle LBA,$$

одакле је $\angle ACB = \angle LBA = \angle CBA$, тј. троугао ABC је једнакокрак.

6. Претпоставимо супротно, нека су a, b, c и d дељиви са $ad - bc$. Следи да је $a = k_1(ad - bc)$, $b = k_2(ad - bc)$, $c = k_3(ad - bc)$ и $d = k_4(ad - bc)$, где су k_1, k_2, k_3 и k_4 природни бројеви.

Међутим, тада је

$$ad - bc = k_1k_4(ad - bc)^2 - k_2k_3(ad - bc)^2 = (ad - bc)^2(k_1k_4 - k_2k_3),$$

односно,

$$(ad - bc)(k_1k_4 - k_2k_3) = 1.$$

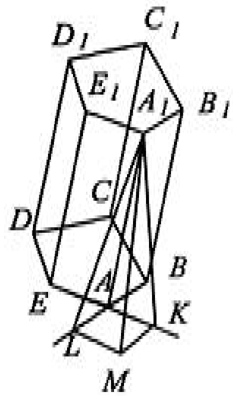
Како је $ad - bc > 1$, то је $0 < k_1k_4 - k_2k_3 < 1$ и $k_1k_4 - k_2k_3 \in Z$. Контрадикција.

7. **(Решење Маје Тасковић)** Означимо темена ове призме са A, B, C, D, E, A_1, B_1, C_1, D_1 и E_1. Знамо да су бочне стране призме паралелограми, тј. важи $AE = A_1E_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CD = C_1D_1$, $DE = D_1E_1$. Пошто су бочне стране паралелограми, следи да се у њима јављају углови φ и $180^\circ - \varphi$.

Ако посматрамо два суседна паралелограма, рецимо AA_1E_1E и ABB_1A_1 (*без умањења општости*), може се десити следеће:

1. случај: $\angle EAA_1 = \angle BAA_1 = \varphi$ или $\angle EAA_1 = \angle BAA_1 = 180^\circ - \varphi$. Ако спустимо нормале из A_1 на праве AE и AB чија су подножја K и L (слика

4), тада се тачке K и L обе налазе или на дужима AE и AB или су обе на продужецима наведених правих.



Сл. 4

Повуцимо, затим, нормалу на раван петоугла $ABCDE$ из тачке A_1 и означимо њено подножје са M.

Из подударности троуглова A_1LA и A_1KA следи подударност дужи A_1K и A_1L. Из тeoреме о три нормале следи $MK \perp AK$ и $ML \perp LA$. Сада лако следи подударност троуглова A_1ML и A_1MK, затим и подударност троуглова ALM и AKM, одакле добијамо подударност углова $\angle LAM$ и $\angle MAK$.

Пошто се тачке K и L налазе или обе на дужима или обе на продужецима дужи AE и AB, следи да се тачка M налази на правој којој припада симетрала унутрашњег угла (петоугла) $\angle EAB$. Значи MA припада правој коју образује симетрала унутрашњег угла петоугла $ABCDE$ код темена A.

2. случај: $\angle EAA_1 = \varphi$, $\angle BAA_1 = 180^\circ - \varphi$ или $\angle EAA_1 = 180^\circ - \varphi$, $\angle BAA_1 = \varphi$.

Сада су нормале A_1L и A_1K распоређене тако да се једна од тачака K и L налази баш на дужи (AE или AB), а друга на продужетку одговарајуће дужи.

Слично првом случају, доказује се подударност углова $\angle LAM$ и $\angle MAK$.

Због распореда тачака K и L следи да се тачка M налази на симетрали спољашњег угла петоугла код темена A.

Означимо сада са N подножје висине из E_1 на раван петоугла $ABCDE$.

Пошто је $EE_1 \| AA_1$ и $NE_1 \| A_1M$ следи да су равни троуглова NEE_1 и MAA_1 паралелне. Како NE и AM припадају једној равни следи $NE \| AM$.

Докажимо сада да AM и NE не могу истовремено припадати симетралама унутрашњих углова $ABCDE$.

Претпоставимо супротно, тј. да оне припадају симетралама унутрашњих углова. Тада због услова $NE \| AM$ следи да су симетрале два суседна унутрашња угла паралелне, тј. $\angle DEA = \angle EAB = 180^\circ$. Контрадикција.

Слично се доказује да AM и NE не могу истовремено припадати симетралама спољашњих углова.

Према томе, подножја нормала из темена горње основе на раван доње основе наизменично припадају симетралама спољашњих и унутрашњих углова тог петоугла. Тада једно од подножја мора припадати истовремено симетралама спољашњег и унутрашњег угла код једног од темена петоугла, па се оно мора поклопити са тим теменом.

Према томе, бочне ивице се поклапају са нормалама, па је једина могућа вредност угла φ једнака $90°$.

8. (а) Обележимо дате новчиће бројевима од 1 до 32.

Прво мерење: Ставимо на један тас новчиће од 1 до 16, а на други од 17 до 32. Ако су теразије у равнотежи, подела је извршена, а ако нису, оба неисправна новчића се налазе на истом тасу.

Друго мерење: На први тас ставимо новчиће од 1 до 8 и од 17 до 24, а на други од 9 до 16 и од 25 до 32. Ако су теразије у равнотежи, подела је извршена, а ако нису онда разликујемо два случаја: претегао је исти тас или је претегао онај други тас. Ако је претегао исти тас, неисправни новчићи се налазе међу 1 и 8, или међу 25 и 32. У супротном, неисправни новчићи се налазе међу 9 и 16, односно, 17 и 24.

Без умањења општости, претпоставимо да је претегао исти тас.

Треће мерење: Пребацимо на други тас новчиће од 5 до 8, а на први новчиће од 25 до 28. Ако су теразије у равнотежи, подела је извршена, а ако нису, онда може да претегне исти тас, па се неисправни новчићи налазе међу 1 и 4, односно 29 и 32. У супротном, неисправни се налазе међу 5 и 8, односно, 25 и 28.

Без умањења општости, претпоставимо да је опет претегао исти тас.

Четврто мерење: Пребацимо на други тас новчиће 3 и 4, а на први новчиће 29 и 30. Ако су тасови у равнотежи, подела је извршена, а ако нису, онда може да претегне исти тас, па су неисправни 1 и 2 или 31 и 32, а ако претегне други, онда су неисправни 3 и 4, односно 29 и 30.

Да бисмо извршили поделу, довољно је да заменимо места новчићима 2 и 31, односно, 4 и 29 и равнотежа ће сигурно бити постигнута, јер смо ставили по један неисправан новчић на сваку страну.

(б) Обележимо новчиће бројевима од 1 до 22.

Прво мерење: Ставимо на један тас новчиће од 1 до 11, а на други од 12 до 22. Ако су теразије у равнотежи, подела је извршена, а ако нису, оба неисправна новчића се налазе на истом тасу.

Друго мерење: На први тас ставимо новчиће од 1 до 6 и од 18 до 22, а на други од 7 до 11 и од 12 до 17. Ако су теразије у равнотежи, подела је извршена, а ако нису онда разликујемо два случаја: претегао је исти тас или је претегао онај други тас. Ако је претегао исти тас, неисправни новчићи се налазе међу 1 и 6, или међу 12 и 17. У супротном, неисправни новчићи се налазе међу 7 и 11 или 18 и 22 (односно, 6 и 11 или 17 и 22).

Без умањења општости, претпоставимо да је претегао исти тас.

Треће мерење: Пребацимо на други тас новчиће од 4 до 6, а на први новчиће од 15 до 17. Ако су теразије у равнотежи, подела је извршена, а ако нису, онда може да претегне исти тас, па се неисправни новчићи налазе међу 1 и 3, односно 12 и 14. У супротном, неисправни се налазе међу 4 и 6, односно, 15 и 17.

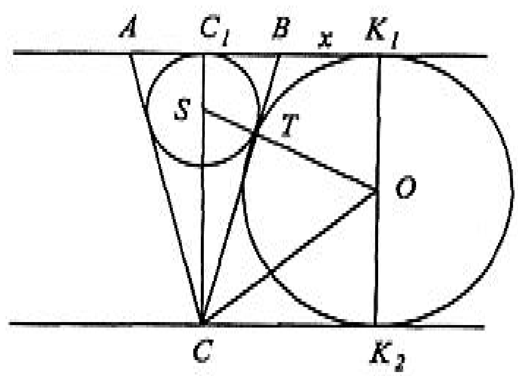
Без умањења општости, претпоставимо да је опет претегао исти тас.

Четврто мерење: Пребацимо на други тас новчић 3, а на први новчић 14. Ако су тасови у равнотежи, подела је извршена, а ако нису, онда може да претегне исти тас, па су неисправни 1 и 2 или 12 и 13 (други не може да претегне, јер се овим мерењем може пренети највише један неисправан новчић).

Да бисмо извршили поделу, довољно је да заменимо места новчићима 2 и 12, односно, 1 и 3 и равнотежа ће сигурно бити постигнута, јер смо ставили по један неисправан новчић на сваку страну.

9. Претпоставимо супротно, тј. да постоји број који је обележен само као најмањи у врсти, или само као најмањи у колони. Нека је n најмањи од бројева са тим својством, и нека је он нпр. обележен као најмањи у врсти. Значи, у његовој колони постоји број m мањи од n. Али m тада мора бити и најмањи у својој врсти (јер то важи за све бројеве мање од n). Међутим, сада међу бројевима изабраним као најмањи у својим врстама имамо два у истој колони, m и n. Контрадикција.

10. Означимо темена датог једнакокраког троугла са A, B и C, са S центар уписане кружнице, са O центар дате кружнице и са T тачку додира троугла и кружнице (слика 5). Нека је C_1 подножје висине из темена C, а K_1K_2 пречник кружнице нормалан на дате две паралелне праве.



Сл. 5

Тада је $AC_1 = AT = AK_1 = x$ (тангентне дужи). С друге стране је $CT = CK_2 = 2x$, па применом Питагорине теореме на правоугли троугао CC_1A добијамо:

$$2^2 + x^2 = (3x)^2,$$

одакле је $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Троуглови AC_1C и STC су слични, па важи:

$$\frac{AC_1}{CC_1} = \frac{ST}{CT},$$

одакле је полупречник уписане кружнице троугла $ST = x^2 = \frac{1}{2}$.

11. Без умањења општости претпоставимо $a \le b \le c \le d$. Бар једна од неједнакости очигледно мора бити строга. Зато је $a + b + c + d < 4d$, па нам $d \mid (a + b + c + d)$ даје $a + b + c + d = 2d$ или $a + b + c + d = 3d$. Други од ова два случаја имплицира да је NZS ова четири броја дељив са 3, па је бар један од њих дељив са 3. Размотримо први случај. Имамо $a + b + c + d = 2d = 2(a + b + c) \le 6c$, па опет добијамо да $a + b + c + d$ мора бити једнак неком од следећих бројева: $2c, 3c, 4c, 5c, 6c$. Друга и пета могућност дају нам дељивост NZS наших бројева са 3, а четврта његову дељивост са 5. Прва могућност значила би $2c = 2d$, тј. $c = d = a + b + c$, што је немогуће. Остаје случај $a + b + c + d = 4c = 2d$. Закључујемо: $a + b = c$. Дакле, $a + b + c + d = 4c = 4(a + b) \le 8b$. Као што већ знамо, не може $a + b + c + d$ бити једнако ниједном од бројева $2b, 3b, 5b, 6b$. Из $a + b + c + d = 4b$ следило би $b = c$, тј. $a = 0$, што је немогуће. Случај $a + b + c + d = 4(a + b) = 8b$ води до закључка $4a = 4b = 2c = d$, па $2d$ не би био NZS. Коначно, $a + b + c + d = 4c = 7b$ даје $c = \frac{7}{4}b$, па из $a + b = c$ добијамо $a = \frac{3}{4}b$, тј $3 \mid a$. Тиме су исцрпени сви случајеви.

12. Приметимо прво да се шаховска табла може обојити црном и белом бојом тако да буде 32 црна поља и да никоја два црна поља немају заједничку страницу на тачно два начина. Бојење је једнозначно одређено бојом доњег левог поља табле.

Бојење под истим условима, уз промену броја црних поља са 32 на 31, састоји се у брисању тачно једног црног поља са претходно обојене табле која садржи 32 црна поља. Будући да то поље у сваком од начина бојења можемо изабрати на 32 начина, следи да је број начина $32 \cdot 2 = 64$.

Међутим, оваквим пребројавањем смо изоставили четири распореда које је могуће остварити на следећи начин: Бело угаоно поље из основног бојења (32+32) заменимо са црним, а њему суседна два поља обојимо белом бојом. Овакво бојење није урачунато у првобитно разматрање, па на основу наведеног следи да постоји 68 начина да се изврши описано бојење.

13. Уочимо да су сви расположиви тегови степени двојке, те да се ниједан од њих не може представити као збир неколико других, будући да је сваки следећи у низу за 1 већи од збира свих претходних. Због наведеног је положај сваког тега на теразијама једнозначно одређен.

Ако је у моменту постизања равнотеже на тасовима теразија било k тегова, тада је укупан терет на теразијама износио $2^k - 1 + 11111$г, одакле следи да се на на сваком тасу налазио терет масе $2^{k-1} + 5555$. Најмање такво k које задовољава услове задатка је 14, па је на десни тас потребно додати тегове укупне масе 2636г.

Јасно је да се на леви тас морају ставити тегови од 1г, 4096г и 8192г. Број 2636 је дељив са 4, па не може бити збир неколико бројева дељивих са 4 и двојке, одакле следи да се и тег од 2г налази на левом тасу.

Сада на леви тас треба додати тегове укупне масе 1456г, па се на њему не налази тег од 2048г, одакле следи да је преостало да се на десни тас ставе тегови укупне масе 588г, односно, да се тег од 1024г налази на левом тасу. Даље закључујемо да се тег од 512г налази на десном тасу, а тегови од 256г и 128г на левом тасу.

Сличним разматрањем утврђујемо да се тег од 64г налази на десном тасу, па је преостало да се на њега ставе тегови масе 12г, одакле следи да се тег од 16г налази за левом тасу.

14. Доказаћемо да је минималан број учесника 2000. Приметимо прво да сваки ученик може урадити највише три задатка. (Ако би неко урадио пет задатака, постоји тачно 1000 ученика који су урадили преостали, шести задатак, па ће увек постојати два ученика која су заједно урадила свих шест задатака; ако би бар један ученик урадио четири задатка, онда би преостала два задатка морало урадити по хиљаду различитих ученика да би био испуњен услов задатка, па би укупан број учесника износио најмање 2001.)

Поделимо ученике у четири групе од по 500 ученика. Следећа табела показује како треба распоредити ученике на задатке (0 означава да група не ради, а 1 да ради дати задатак):

	I	II	III	IV
1.	0	0	1	1
2.	0	1	0	1
3.	0	1	1	0
4.	1	1	0	0
5.	1	0	1	0
6.	1	0	0	1

Како мора постојати укупно 6000 решења, а ниједан од ученика не може да реши више од 3 задатка следи да не може бити мање од 2000 учесника.

15. **(Решење Сијаваша Каримија)** Будући да се свака карта може искористити највише један пут, следи да у свакој једнакости учествују најмање три карте. Како је на располагању укупно 100 карата, следи да је могуће направити највише 33 једнакости које задовољавају услове задатка. Овај број једнакости је могуће постићи на следећи начин:

1+91=92	8+81=89	15+44=59	22+45=67	32+51=83
2+98=100	9+78=87	16+70=86	23+42=65	33+63=96
3+94=97	10+46=56	17+58=85	24+31=55	36+40=76
4+95=99	11+74=85	18+35=53	25+54=79	38+39=77
5+88=93	12+49=61	19+52=71	26+34=70	41+43=84
6+66=72	13+69=82	20+30=50	27+37=64	
7+73=80	14+48=62	21+47=68	28+29=57	

Преостала нам је једна неискоришћена карта на којој је написан број 90.

16. Види решење 11. задатка

17. За $n = 12$. Јасно је да свака пљосан коцке може садржати највише два темена траженог правилног многоугла, јер би у супротном цео многоугао припадао само једној пљосни. Одавде следи да тражени многоугао може имати највише 12 темена. Познато је да се коцка може пресећи по правилном шестоуглу, тако да раван пресека сече свих шест пљосни коцке. Ако сваку страницу тог шестоугла поделимо у односу $\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{2} : 1 - \sqrt{2}(2-\sqrt{3}) : \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{2}$, добијене тачке ће одређивати правилан дванаестоугао.

18. Троуглови B_2BC и ABB_1 су по конструкцији једнакокраки, са истим углом између кракова, па следи да су слични. Следи да је $AB_1 : B_2C = c : a$ и да су углови $\angle A_1AB_1$ и $\angle C_2CB_2$ подударни (трансверзални углови).

С друге стране, по конструкцији је $AA_1 : CC_2 = c : a$, па из наведеног закључујемо да су троуглови AB_1A_1 и CB_2C_2 троуглови слични, са коефицијентом сличности $\frac{c}{a}$, па следи да је $A_1B_1 : C_2B_2 = c : a$.

19. Упутство:

(а) Написати дати разломак преко помоћне функције $f_n(x)$.

(б) Најмање n за које је такви бројеви постоје је 4.

20. Докажимо најпре да на целој табли има једнако много поља обе боје (нпр. белих и црних). Претпоставимо ли супротно, рецимо да белих има више, закључујемо да постоји бар једна "бела" вертикала (тј. она са више белих него црних поља) и бар једна "бела" хоризонтала. Поставимо ли топа на пресечно поље тих линија, видимо да услови задатка нису испуњени. Дакле број црних и белих поља на табли је исти.
Ако претпоставимо да бар једна хоризонтала и бар једна верикала немају исти број белих и црних поља, опет добијамо да постоје "бела" хоризонтала и "бела" вертикала, што поново води до контрадикције.
Нека су сада све хоризонтале са истим бројем црних и белих поља, а за вертикале то не важи. Тада постоји "бела" вертикала. Ако на њој нема ниједног црног поља, претпоставке задатка падају на сваком њеном пољу. У супротном, падају баш на црном пољу те вертикале, тј. топ постављен на то поље тући ће више белих поља. Контрадикција. Закључујемо да и хоризонтале и вертикале имају једнак број поља обе боје.

Покажимо да се табла не може обојити на више од 68 начина. Разбијмо таблу на 16 квадрата 2×2. Тада сваки квадрат може садржати највише 2 црна поља. Како укупно има 31 црно поље, то 15 квадрата садржи 2 црна поља (назовимо их правилним), а један квадрат садржи једно црно поље (назовимо га неправилним). Сваки правилан квадрат можемо обојити на тачно два начина: доњи леви угао може бити црн или бео. Ако је познато бојење једног правилног квадрата, тада је једнозначно одређено и бојење свих осталих правилних квадрата. Ако је неправилан квадрат фиксиран, тада постоје тачно два различита бојења остатка табле по описаним правилима. Изаберимо једно од та два бојења, рецимо као код шаховске табле. Ако се неправилан квадрат не налази у углу, тада постоје тачно два бојења, а ако се налази у доњем левом или горњем десном углу, тада се црно поље може добити на три начина. Сада је јасно да је укупан број бојења једнак $2 \cdot 16 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 68$.

ДВАДЕСЕТ ДРУГИ ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло. Припремна варијанта, 25. фебруар 2001.

8-9 разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени	задаци
3	**1.** Природни број n је дозвољено заменити бројем ab, ако су a и b природни бројеви који задовољавају услов $a+b=n$. Може ли се помоћу таквих замена од броја 22 добити број 2001?
4	**2.** Једна средња линија троугла је већа од једне од његових медијана. Доказати да је тај троугао тупоугли.
4	**3.** У продавницу су довезли 20 kg сира и направио се ред за њега. Пошто прода сир купцу који је на реду, продавачица тачно израчуна средњу тежину куповине продатог сира и саопштава за колико људи има довољно преосталог сира, ако сви буду куповали ту средњу тежину. Да ли је продавачица могла да после сваког од првих 10 купаца саопшти да је преосталог сира довољно за тачно 10 људи? Ако је могла, колико је сира остало у продавници после првих 10 купаца? (Средња тежина куповине - то је укупна тежина продатог сира подељена бројем оних који су тај сир купили.)
2	**4.** а) На столу лежи пет једнаких папирних троуглова. Дозвољено је сваког од њих транслирати у произвољном смеру. Да ли је тачно да се увек било који од тих троуглова може покрити са четири преостала?
3	б) На столу леже пет једнаких једнакостраничних папирних троуглова. Дозвољено је сваког од њих транслирати у произвољном смеру. Доказати да се било који од тих троуглова може покрити са четири преостала.
5	**5.** На табли димензија 15×15 распоређено је 15 топова, тако да не туку један другога. Потом је сваки топ премештен скоком коња. Доказати да ће сада нека два топа да туку један другога.

ДВАДЕСЕТ ДРУГИ ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло. Припремна варијанта, 25. фебруар 2001.

10-11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена.)

поени задаци

3 **1.** Аутобус, који се креће путем дужине 100 km, опремљен је компјутером који показује прогнозу времена које преостаје до доласка на одредиште. То време се рачуна на основу претпоставке да ће средња брзина аутобуса на преосталом делу пута бити иста као и на већ пређеном делу. После 40 минута од поласка, очекивано време до доласка било је 1 час, и такво је остало у току наредних 5 часова. Да ли је то могуће? Ако јесте, колико је километара прешао аутобус на крају тих 5 часова? (Средња брзина аутобуса на делу пута - то је дужина тог дела пута подељена временом за које је он пређен.)

4 **2.** Декадни запис природног броја a се састоји од n цифара, а декадни запис броја a^3 (а на куб) се састоји од m цифара. Може ли $n+m$ бити једнако 2001?

4 **3.** У троуглу ABC тачка X лежи на страници AB, а тачка Y на страници BC. Дужи AY и CX се секу у тачки Z. Познато је да је $AY=YC$ и $AB=ZC$. Доказати да тачке B, X, Z и Y леже на једној кружници.

5 **4.** Двоје играју на табли 3×100 поља: наизменично стављају на слободна поља домине 1×2. Први играч ставља домине усмерене дуж табле, а други у попречном смеру. Губи онај који не може да одигра потез. Који играч може да обезбеди себи победу (ма како играо противник), и како треба да игра?

5 **5.** На површи правилног тетраедра ивице 1 cm одабрано је 9 тачака. Доказати да се међу тим тачкама могу наћи две, чије међусобно растојање (у простору) није веће од 0,5 cm.

ДВАДЕСЕТ ДРУГИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло. Основна варијанта, 4. март 2001.
8-9 разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени задаци

1. У некој земљи има 10 процената радника чија зарада представља 90 процената свих зарада која се исплаћују у тој земљи. Може ли
3 бити да у сваком региону, на које је подељена та земља, зарада било којих 10 процената радника није већа од 11 процената свих зарада које се исплаћују у том региону?

2. Дате су три гомиле камена: на првој има 51 камен, на другој 49, а на трећој 5. Дозвољено је да се две гомиле обједине у једну,
5 а такође и да се гомила, која се састоји од парног броја каменова, подели на две једнаке. Може ли се добити 105 гомила са по једним каменом у свакој?

3. Унутар угла са теменом M уочена је тачка A. Из те тачке је избачена лопта, која се одбила од једног крака угла у тачки B,
5 затим од другог крака у тачки C и вратила се у тачку A ("*упадни*" *угао је једнак* "*одбојном*" *углу*). Доказати да центар O *кружнице* описане око троугла BCM лежи на правој AM. (Сматра се да је лопта тачка.)

4. На табли је нацртан конвексни многоугао. У њему је конструисано неколико дијагонала, које се не секу унутар њега, тако да је он
5 разложен на троуглове. Затим је поред сваког темена записан број троуглова који се сустичу у том темену, после чега су све дијагонале избрисане. Могу ли се помоћу бројева који су остали поред темена реконструисати избрисане дијагонале?

5. а) На два поља шаховске табле постављене су црна и бела фигура. Дозвољено их је наизменично померати, у сваком потезу фигуру
3 која је на реду, на било које слободно суседно поље по вертикали или хоризонтали. Могу ли се као резултат таквих померања на табли појавити све могуће позиције тих двеју фигура, при том свака тачно по један пут?
б) А ако је дозвољено померати фигуре произвољним редом (не
4 обавезно наизменично)?

6. *Нека су* AH_a, BH_b *и* CH_c *висине троугла* ABC. *Доказати да је* троугао чија су темена ортоцентри троуглова AH_bH_c, BH_aH_c и CH_aH_b
7 подударан троуглу $H_aH_bH_c$.

7. Аца је замислио двоцифрен број (од 10 до 99). Глиша покушава да га открије бирајући двоцифрене бројеве. Ако Глиша одабере тачан број, или ако тачно одабере једну цифру а другу погреши за један, Аца одговара "вруће"; у осталим случајевима Аца одговара "хладно". (На пример, ако је замишљени број 65, кад изабере 65, 64, 66, 55 или 75, Глиша ће чути одговор "вруће", а у осталим случајевима ће чути "хладно").
2 а) Показати да не постоји начин, на који Глиша гарантовано може да сазна замишљени број, из 18 покушаја.
3 б) Наћи начин на који Глиша гарантовано може да сазна замишљени број, из 24 покушаја.
3 в) А шта се добија са 22 покушаја?

ДВАДЕСЕТ ДРУГИ ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло. Основна варијанта, 4. март 2001.

10-11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени задаци

3 **1.** Наћи бар један полином $P(x)$ степена 2001, такав да је за свако x задовољена једнакост $P(x)+P(1-x)=1$.

5 **2.** Приликом прављења извештаја о школској години испоставило се да свакој групи са не мање од 5 ученика 80 процената двојки, које су добили ти ученици током године, има не више од 20 процената ученика из те групе. Доказати да је бар три четвртине свих двојки добио један ученик.

5 **3.** Нека су AH_a, BH_b и CH_c висине троугла ABC. Доказати да је троугао чија су темена ортоцентри троуглова AH_bH_c, BH_aH_c и CH_aH_b подударан троуглу $H_aH_bH_c$.

5 **4.** Дате су две таблице A и B, свака са по m врста и n колона. У сваком пољу сваке од таблица уписан је један од бројева 0 или 1, при чему у врстама таблица бројеви не опадају (при кретању слева надесно) и у колонама таблица бројеви не опадају (при кретању одозго наниже). Познато је да за свако k од 1 до m збир бројева у горњих k врста таблице A није мањи од збира бројева у горњих k врста таблице B. Познато је такође да у таблици A има исто толико јединица, колико и у таблици B. Доказати да за свако l од 1 до n збир бројева у левих l колона таблице A није већи од збира бројева у левих l колона таблице B.

5. Учесници шаховског турнира су одиграли сваки са сваким по једну партију. За сваког учесника је срачунат број поена које је он добио (за победу 1 поен, за реми 1/2 поена, за пораз 0 поена).

4 а) Може ли за сваког учесника збир поена оних које је он победио бити већи од збира поена оних од којих је он изгубио?

4 б) Може ли за сваког учесника збир поена оних које је он победио бити мањи од збира поена оних од којих је он изгубио?

8 **6.** Доказати да постоје 2001 конвексних полиедара у простору, таквих да никоја три од њих немају заједничких тачака, а да било која два додирују један другог (то јест имају бар једну заједничку граничну тачку, но немају заједничких унутрашњих тачака).

7. По кругу је распоређено неколико корпица. У свакој од њих може да буде једна или неколико куглица (или она може бити празна). Корак се састоји у томе што се из неке корпице узимају све куглице и размештају по једна, идући у смеру кретања казаљке на часовнику, почевши од наредне корпице.

4 а) Нека се у сваком наредном кораку дозвољава узимање куглица из оне корпице у коју је стављена последња куглица у претходном кораку. Доказати да ће се у неком моменту поновити почетни распоред куглица.

4 б) Нека је у једном кораку дозвољено узети куглице из произвољне корпице. Да ли је тачно да се после неколико корака од произвољног почетног распореда куглица по корпицама може добити било који други распоред?

International Mathematics

22nd Tournament of Towns

Spring 2001, Ordinary Level

Solutions

Junior (Grades 7, 8, 9 and 10)

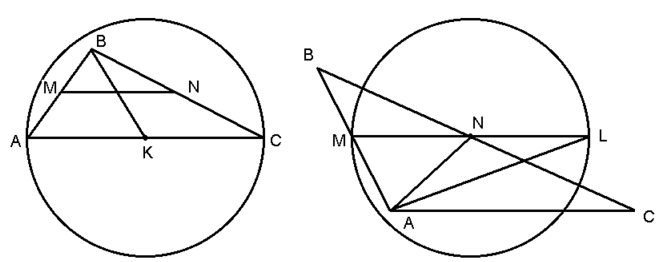
1. [3] The natural number n can be replaced by ab if $a + b = n$, where a and b are natural numbers. Can the number 2001 be obtained from 22 after a sequence of such replacements?

Solution. Yes, it can. In fact, there are infinitely many ways of obtaining 2001 from 22. First note that $n = (n-1) + 1$, so from n we can obtain $n-1$. Now it is enough to get any number larger than 2001 and then descend to 2001 one by one. For example we can do: $22 = 11 + 11 \to 121 = 60 + 61 \to 3660 \to 3659 \to \cdots \to 2001$.

2. [4] One of the midlines of triangle $\triangle ABC$ is longer than one of its medians. Prove that the triangle has an obtuse angle.

Solution. Let M and N be the midpoints of AB and BC, respectively. Assume first that midline MN is longer than median BK. Let us draw a circle centered at K with radius $AK = KC = MN$, so AC is its diameter. Since BK is shorter than the radius MN, point B lies inside the circle. Therefore, angle $\angle ABC$ is obtuse.

Now assume MN is longer than one of the other two medians, say $|MN| > |AN|$. Let us draw a circle centered at N with radius MN. Let ML be its diameter. Again since AN is shorter than the radius MN, point A lies inside the circle. Therefore angle $\angle MAL$ is obtuse and hence BAC is obtuse.



3. [4] Twenty kilograms of cheese are on sale in a grocery store. Several customers are lined up to buy this cheese. After a while, having sold the demanded portion of cheese to the next customer, the salesgirl calculates the average weight of the portions of cheese already sold and declares the number of customers for whom there is exactly enough cheese if each customer will buy a portion of cheese of weight exactly equal to the average weight of the previous purchases. Could it happen that the salesgirl can declare every time a customer has made their purchase, that there just enough cheese for the next 10 customers? If so, how much cheese will be left in the store after the first 10 customers have made their purchases? (The average weight of a series of purchases is the total weight of the cheese sold divided by the number of purchases.)

Solution. Let a_k be the amount of cheese kth customer bought. Then $(a_1 + \cdots + a_k)/k$ is the average amount of cheese sold to the first k customers and $20 - (a_1 + \cdots + a_k)$ is the remaining amount. The salesgirl declares that this would be enough for exactly 10 more customers if they buy the average amount each. This means that

$$20 - (a_1 + \cdots + a_k) = 10\, \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k},$$

or

$$a_1 + \cdots + a_k = \frac{20k}{k + 10}.$$

Since this holds for every k we also have

$$a_1 + \cdots + a_{k-1} = \frac{20(k-1)}{k + 9}.$$

Subtracting one from the other we get

$$a_k = \frac{200}{(k+9)(k+10)} > 0.$$

Therefore if kth customer buys exactly this amount of cheese, then the condition of the problem will be met.

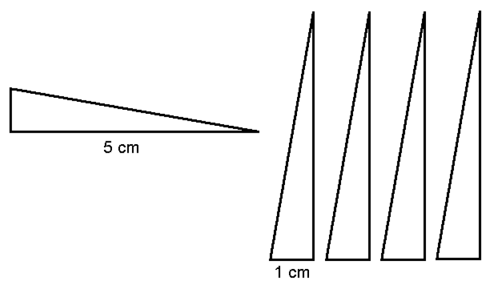
Under the above assumption, we get

$$a_1 + \cdots + a_{10} = \frac{20 \cdot 10}{10 + 10} = 10.$$

Thus there will be $20 - 10 = 10$ kg of cheese left.

4 a. [2] There are 5 identical paper triangles on the table. Each can be moved in any direction parallel to itself (i.e., without rotating it). Is it true that then any one of them can be covered by the 4 others?

Solution. No. In the following example first triangle cannot be covered by the other four.



4 b.[3] There are 5 identical equilateral paper triangles on the table. Each can be moved in any direction parallel to itself. Prove that any one of them can be covered by the 4 others in this way.

Solution. Each equilateral triangle contains an inscribed disc inside it. Each such disc can cover an equilateral triangle of twice smaller side. Let us divide one triangle into 4 equal equilateral triangles of twice smaller side, by drawing its three midlines. Then let's cover these four small triangles by the discs inside the other four triangles. We can do this by moving the triangles parallel to themselves. Thus, any triangle can be covered by the other four in this way.

5. [5] On a square board divided into 15×15 little squares there are 15 rooks that do not attack each other. Then each rook makes one move like that of a knight. Prove that after this is done a pair of rooks will necessarily attack each other.

Solution. Let us number the rows and the columns of the board by numbers from 1 to 15. Then every square is represented by a pair of numbers (a, b), where a, b are between 1 and 15. Let (a_k, b_k) represents the square on which kth rook is placed. Since at the beginning the rooks do not attack each other, in every row (column) there is exactly one rook. Therefore the numbers $a_1, \dots, a_{15}$ are all numbers from 1 to 15. The same for $b_1, \dots, b_{15}$. We conclude that if the rooks do not attack each other then the sum $S = a_1 + \dots + a_{15} + b_1 + \dots + b_{15} = 15 \cdot 16$ is even.

We will show now that after each rook makes a move of a knight the sum S becomes odd. Indeed, when kth rook makes a move of a knight a_k changes by 1 and b_k changes by 2 or a_k changes by 2 and b_k changes by 1. Thus, $a_k + b_k$ changes by either 1 or 3. Since we have an odd number of rooks the sum S becomes odd after all rooks have made their moves. But this means that a pair of rooks will attack each other, otherwise, as we proved above, the sum S would be even.

SOLUTIONS OF TOURNAMENT OF TOWNS

Spring 2001, Level 0, Senior (grades 11-OAC)

Problem 1 [3] A bus that moves along a 100 km route is equipped with a computer, which predicts how much more time is needed to arrive at its final destination. This prediction is made on the assumption that the average speed of the bus in the remaining part of the route is the same as that in the part already covered. Forty minutes after the departure of the bus, the computer predicts that the remaining travelling time will be 1 hour. And this predicted time remains the same for the next 5 hours. Could this possibly occur? If so, how many kilometers did the bus cover when these 5 hours passed? (Average speed is the number of kilometers covered divided by the time it took to cover them.)

Solution. Let $S(t)$ be a distance covered by the bus for a time t. If the described situation is possible then for any moment $t \geq \frac{2}{3}$ (in hours) we have

$$\frac{100 - S(t)}{1} = \frac{S(t)}{t}$$

or

$$S(t) = \frac{100t}{1+t}. \qquad (*)$$

It is easy to see that $S(t)$ is a continuous monotone increasing function on $(0, \infty)$; this means that the bus is moving toward its destination. Moreover the distance expressed by (*) means that at any moment t the estimated remaining time will be 1 hour. Substituting $t = 5\frac{2}{3}$ into $(*)$ we get that $S(t) = 85$ km.

Problem 2 [4] The decimal expression of the natural number a consists of n digits, while that of a^3 consists of m digits. Can $n + m$ be equal to 2001?

Solution. The fact that the decimal expression of a natural number a consists of n digits means that

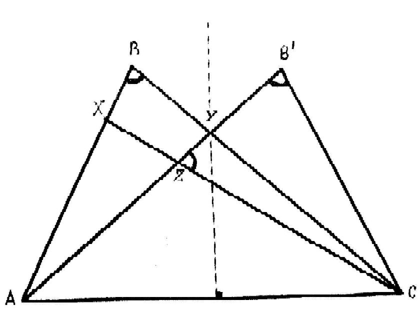
$$10^{n-1} \leq a < 10^n;$$

thus

$$10^{3n-3} \leq a^3 < 10^{3n}.$$

So, $m \in \{3n-2, 3n-1, 3n\}$ and $n + m \in \{4n-2, 4n-1, 4n\}$. Therefore
$n + m \neq 1 \pmod 4$ and the answer is negative.

Problem 3 [4] Points X and Y are chosen on the sides AB and BC of the triangle $\triangle ABC$. The segments AY and CX intersect at the point Z. Given that $AY = YC$ and $AB = ZC$ prove that the points B, X, Z, and Y lie on the same circle.



Solution. Let us construct B' symmetrical to B with respect to the straight line passing through Y perpendicular to AC. We get that $\triangle ABY$ is congruent to $\triangle YB'C$; so $\angle ABC = \angle AB'C$. Since $ZC = AB = B'C$ we have $\angle AB'C = \angle B'CZ$. This implies that $\angle XZY = 180° - \angle XBY$ which means that the points B, X, Z, Y lie on the same circle.

Problem 4 [5] Two persons play a game on a board divided into 3×100 squares. They move in turn: the first places tiles of size 1×2 lengthwise (along the long axis of the board), the second, in the perpendicular direction. The loser is the one who cannot make a move. Which of the players can always win (no matter how his opponent plays), and what is the winning strategy?

Solution. Let us partition the board into 25 parts 3×4. The first player's strategy is to put tiles into the middle lines of these parts. For his first move he chooses any part; if the second player puts his tile into the same part then the first player chooses any free part for his next move; otherwise he puts his tile in the same part that the second player did. This guarantees at least 25 moves for the first player, leaving not more than 25 additional moves for the second player. However, the first player is guaranteed at least 25×2 the other moves (above and below his tiles) and the second player can not prevent him from making those moves.

Problem 5 [5] Nine points are drawn on the surface of a regular tetrahedron with an edge of 1 cm. Prove that among these points there are two located at a distance (in space) no greater than 0.5 cm.

Solution. Let us partition a tetrahedron surface into 16 congruent triangles, dividing each face by its middle lines. Now let us create 8 regions by painting these triangles according to the following rule: the triangles related to the same tetrahedron vertex we paint with one colour; so we use four different colours for 12 such triangles and another four for the rest of them. According to the Pigeonhole principle, at least two points belong to the same region. This only leaves us to prove that if two points belong to the same region (both types) then the distance between them cannot exceed 0.5.

International Mathematics

22nd Tournament of Towns

Spring 2001, Advanced Level

Solutions

Junior (Grades 7, 8, 9 and 10)

1. [3] In a certain country 10% of the employees get 90% of the total salary paid in this country. Supposing that the country is divided in several regions, is it possible that in every region the total salary of any 10% of the employees is no greater than 11% of the total salary paid in this region?

Solution. Yes, it is possible. Assume there are 100 employees and 2 regions A and B in the country. Assume also that there are 10 people in region A and 90 people in region B. Let the salary of each employee in region A be $81,000 and the salary of each employee in region B be $1,000.

The salary of 10 people (which is 10% of the employees) in region A is $810,000 (which is 90% of the total salary). Also the salary of any 10% of employees in region A (i.e. of any person) is 10% of the salary paid in this region. Clearly, the same holds for region B.

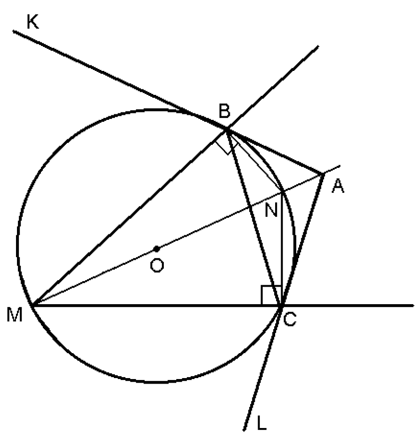
2. [5] In three piles there are 51, 49, and 5 stones, respectively. You can combine any two piles into one pile or divide a pile consisting of an even number of stones into two equal piles. Is it possible to get 105 piles with one stone in each?

Solution. No, it is not. Note that if at one step the number of stones in each pile is divisible by an odd integer, then at the next step the number of stones in each pile is divisible by the same integer. Clearly, at the very first step we only can obtain either two piles of 100 and 5 stones, or two piles of 56 and 49 stones, or two piles of 54 and 51 stones. In each case the number of stones in two piles has an odd divisor (5, 7, and 3, respectively) greater than 1. Thus, we cannot obtain 105 piles of 1 stone each, since the common divisor in that case is 1.

3. [5] Point A lies inside an angle with vertex M. A ray issuing from point A is reflected in one side of the angle at point B, then in the other side at point C and then returns back to point A (the ordinary rule of reflection holds). Prove that the center of the circle circumscribed about triangle $\triangle BCM$ lies on line AM.

Solution. Let N be the intersection point of the lines through B and C orthogonal to MB and MC respectively. In quadrilateral $MBNC$ angles B and C are right angles, thus point N lies on the circle circumscribed about $\triangle BCM$ and MN is the diameter of this circle.

On the other hand, because of the reflection law at points B and C, lines BN and CN are bisectors in triangle $\triangle ABC$. Thus, we only need to show that point M also lies on the bisector AN. Indeed, BM and CM are bisectors of angles $\angle CBK$ and $\angle BCL$, respectively (again by the reflection at points B and C). It follows that the distance from M to lines AK and AL is the same. Therefore, point M belongs to the bisector of angle A.



4. [5] Several non-intersecting diagonals divide a convex polygon into triangles. At each vertex of the polygon the number of triangles adjacent to it is written. Is it possible to reconstruct all the diagonals using these numbers if the diagonals are erased?

Solution. Yes, it is possible. First, we will prove that there always exists a vertex with number 1 written next to it. Indeed, each diagonal splits the polygon into two polygons. Let us choose a diagonal for which one of the polygons has minimal number of vertices (the other polygon will have maximal number of vertices). Clearly, there are no other diagonals inside the "smallest" polygon (otherwise it would not be "smallest"), therefore it is a triangle. Denote it $\triangle ABC$, where BC is the chosen diagonal. The number corresponding to vertex A is 1.

Now take any vertex (call it A) with number 1 next to it. Then the diagonal connecting its two adjacent vertices B and C is one of the erased diagonals. Let us draw it and consider new polygon where vertex A is omitted. Let us also subtract 1 from the numbers at vertices B and C (since the number of triangles in our new polygon adjacent to these vertices is smaller by 1). Our new polygon has fewer number of vertices and satisfies the conditions of the problem, so we can repeat our procedure until we end up with a triangle. All the diagonals are now reconstructed.

5. (a) [3] One black and one white pawn are placed on a chessboard. You may move the pawns in turn to the neighbouring empty squares of the chessboard using vertical and horizontal moves. Can you arrange the moves so that every possible position of the two pawns will appear on the chessboard exactly once?

(b) [4] Same question, but you don't have to move the pawns in turn.

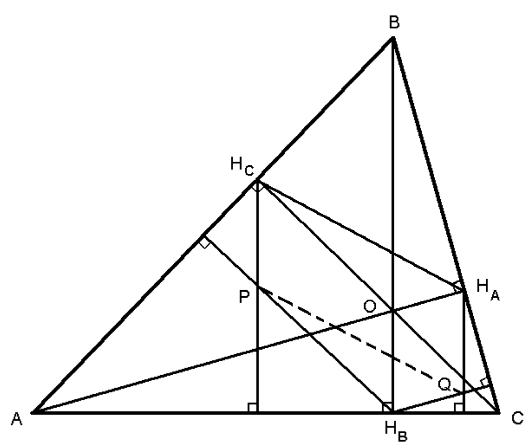
Solution. (a) Assume we can arrange the moves so that every possible position appears exactly once. Consider any square which is empty at the beginning and at the end of our moves. Then there are exactly 63 positions (we call them "special") when the white pawn is placed on this square and the black one is placed on some other square. On the other hand, all special position split into pairs: when the white pawn moves to this square (this is a special position) and after the next move of the black pawn (this is again a special position). All these pairs are different since we assumed that every possible position appears only once. But 63 is odd, which is a contradiction. The answer is no.

(b) Again the answer is no. Let us call a position "even" if the pawns are placed on the squares of the same colour, and "odd" otherwise. Note that even and odd positions alternate. Therefore the number of even and odd positions differs at most by 1. On the other hand, the number of even positions is $64 \cdot 31$ (indeed, we can put the white pawn at any of 64 squares and the black pawn at any of 31 squares of the same colour as the first one). Similarly, the number of odd positions is $64 \cdot 32$ (again we can put the white pawn at any square and the black pawn at any of 32 squares of the opposite colour to the first one). Therefore, the number of even and odd positions differs by 64, and thus we cannot arrange moves so that every possible position appears exactly once.

6. [7] Let AH_A, BH_B and CH_C be the altitudes of triangle $\triangle ABC$. Prove that the triangle whose vertices are the intersection points of the altitudes of triangles $\triangle AH_BH_C$, $\triangle BH_AH_C$ and $\triangle CH_AH_B$ is equal to triangle $\triangle H_AH_BH_C$.

Solution. Let O be the intersection point of the altitudes of triangle $\triangle ABC$. Let P, Q be the intersection points of the altitudes of triangles $\triangle AH_BH_C$ and $\triangle CH_AH_B$, respectively. We will prove that side PQ is equal to side H_CH_A. The proof of equality of the other two pairs of sides is the same.

We are going to show that H_CPQH_A form a parallelogram, and hence $PQ = H_CH_A$. First, note that H_CPH_BO is a parallelogram. Therefore, H_CP and OH_B are equal and parallel. On the other hand, H_AQH_BO is also a parallelogram. Therefore, OH_B and H_AQ are equal and parallel. We get H_CP and H_AQ are equal and parallel, so H_CPQH_A is a parallelogram.



7. Alex thinks of a two-digit integer (any integer between 10 and 99). Greg is trying to guess it. If the number Greg names is correct, or if one of its digits is equal to the corresponding digit of Alex's number and the other digit differs by one from the corresponding digit of Alex's number, then Alex says "hot"; otherwise, he says "cold". (For example, if Alex's number was 65, then by naming any of 64, 65, 66, 55 or 75 Greg will be answered "hot", otherwise he will be answered "cold".)

(a) [2] Prove that there is no strategy which guarantees that Greg will guess Alex's number in no more than 18 attempts.

(b) [3] Find a strategy for Greg to find out Alex's number (regardless of what the chosen number was) using no more than 24 attempts.

(c) [3] Is there a 22 attempt winning strategy for Greg?

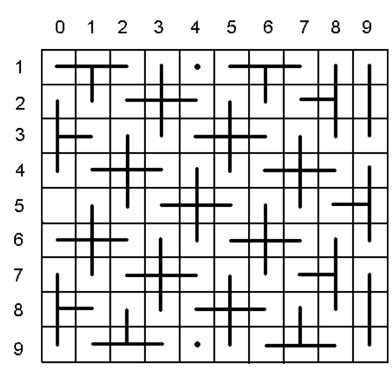
Solution. (a) Assume that Greg has a strategy which guarantees that he will guess Alex's number in no more than 18 attempts. If Greg says $\overline{ab}$ and Alex says "cold" then the numbers $\overline{a(b-1)}$, $\overline{a(b+1)}$, $\overline{(a-1)b}$, $\overline{(a+1)b}$ and $\overline{ab}$ cannot be the Alex's number. Therefore, no matter what strategy Greg has there is a situation when the first 17 answers were "cold". Indeed, on each step Greg can "cover" at most 5 numbers, so there will be $90 - 17 \cdot 5 = 5$ numbers which will not be covered and one of them could have been Alex's. But even if the 18th answer is "hot", still there are five numbers that could have been Alex's number and Greg will not be able to tell which one it was.

(b), (c) We will give a 22 attempt strategy for Greg. Let's form a table in which rows represent first digit and columns represent second digit. We cover the table by 22 figures, which represent Greg's moves. They consist of 9 crosses, 9 half-crosses, 2 dashes, and 2 dots. Note that one square (number 50) is not covered.

Now Greg's strategy is the following. He first tries numbers that are inside crosses. If all answers were "cold" then he tries numbers that are inside half-crosses. If again all answers were "cold" he tries numbers inside dashes. If the answers were "cold", he tries number that are dots. If all the answers were "cold", he knows that Alex's number was 50.

It remains to explain what to do if at some point Alex says "hot". Assume the answer is "hot" when Greg says a number inside a cross, say 23. Then in three more attempts Greg can find out Alex's number. Indeed, if 22 is "cold" and 24 is "hot", then Alex's number is 24. Similarly, if 22 is "hot" and 24 is "cold", then Alex's number is 22. If both are "cold" then if 13 is "cold", Alex's number is 33, otherwise it is 13. If both are "hot" the number is 23.

Assume now that the answer is "hot" when Greg says a number inside a half-cross or a dash. Then using similar arguments as before one can show that Greg can find out Alex's number in two more attempts. It might happen that the answer will be "hot" when Greg tries the number inside the last dash (that would be the 20th attempt). So in exactly 2 more attempts he will find out Alex's number!



SOLUTIONS OF TOURNAMENT OF TOWNS

Spring 2001, Level A, Senior (grades 11-OAC)

Problem 1 [3] Find at least one polynomial $P(x)$ of degree 2001 such that $P(x) + P(1-x) = 1$ holds for all real numbers x.

Solution. It is easy to see that polynomial

$$P(x) = (1-x)^{2001} - x^{2001} + \frac{1}{2}$$

satisfies identity $P(x) + P(1-x) = 1$.

Problem 2 [5] At the end of the school year it became clear that for any arbitrarily chosen group of no less than 5 students, 80% of the marks "F" received by this group were given to no more than 20% of the students in the group. Prove that at least 3/4 of all "F" marks were given to the same student.

Solution. Let us arrange all the students in the school according to the number of "F"marks they received. So, $F_1 \geq F_2 \geq \cdots \geq F_n$ where F_j is the number of "F" received by j-th student, $1 \leq j \leq n$, $F_j \geq 0$ and $\sum_{j=1}^{n} F_j = F$ where F is a total number of "F" marks.

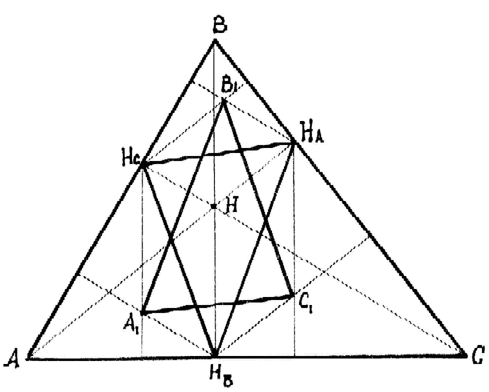
Now let us consider the first five students. According to the condition, one student (who has to be on top of the list) got at least 80% of "F" marks received by this group which leaves no more than 20% of "F" marks remaining for the other four students. So, $F_2 + F_3 + F_4 + F_5 \leq \frac{1}{4}F_4$ and we have an estimate $F_2 \leq \frac{1}{4}F_1$. Considering students from k-th to $k+4$-th ($k+4 \leq n$) we conclude that $F_{k+1} \leq \frac{1}{4}F_k$ which implies that $F_{k+1} \leq \frac{1}{4^k}F_1$ ($k \leq n-5$) and $F_{n-3} + F_{n-2} + F_{n-1} + F_n \leq \frac{1}{4}F_{n-4}$.

Now we have

$$F = F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-4} + (F_{n-3} + \cdots + F_n) \leq$$
$$F_1 + \frac{1}{4}F_1 + \frac{1}{4^2}F_1 + \cdots + \frac{1}{4^{n-5}}F_1 + \frac{1}{4^{n-4}}F_1 < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k}F_1 = \frac{F_1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}F_1;$$

Therefore $F_1 > \frac{3}{4}F$.

Problem 3 [5] Let AH_A, BH_B and CH_C be the altitudes of triangle $\triangle ABC$. Prove that the triangle whose vertices are the intersection points of the altitudes of $\triangle AH_BH_C$, $\triangle BH_AH_C$ and $\triangle CH_AH_B$ is congruent to $\triangle H_AH_BH_C$.



Solution. Let us notice that $H_CA_1H_BH$ and $HH_AC_1H_B$ are parallelograms (HH_A and H_BC_1 are perpendicular to BC; H_CA_1, HH_B and H_AC_1 are perpendicular to AC; HH_C and H_BA_1 are perpendicular to AB). Therefore $H_CA_1 = H_AC_1$ and since they are parallel we conclude that $H_CH_AC_1A_1$ is parallelogram, thus $H_CH_A = A_1C_1$. In a similar way we can prove that $H_BH_A = A_1B_1$ and $H_CH_B = B_1C_1$. Therefore $\triangle H_CH_AH_B \cong \triangle A_1B_1C_1$.

Problem 4 [5] There are two matrices A and B of size $m \times n$ each filled only by "0"s and "1"s. It is given that along any row or column its elements do not decrease (from left to right and from top to bottom). It is also given that the numbers of "1"s in both matrices are equal and for any $k = 1, \ldots, m$ the sum of the elements in the top k rows of the matrix A is no less than that of the matrix B. Prove for any $l = 1, \ldots, n$ the sum of the elements in left l columns of the matrix A is no greater than that of the matrix B.

Solution. Let us denote the elements of matrices A and B by a_{ij} and b_{ij} respectively where a_{ij} and b_{ij} are equal to 0 or 1. Notice that if $a_{ij} = 1$ then $a_{i'j'} = 1$ for all $i' \geq i, j' \geq j$ and the same is true for b_{ij}.

Let us assume that for some l

(*) The sum of the elements in left l columns of the matrix A is no greater than that of the matrix B.

Let us consider the minimal l with this property. Let k be the number of "1"s in l-th column of matrix A. Notice that k exceeds the number of "1"s in the same column of matrix B, otherwise we would not have (*). Note that the l-th column and the p-th row ($p = m - k + 1$) divide the matrices into four parts defined by relations:
$P_1 : 1 \leq i \leq p - 1$ and $1 \leq j \leq l$;
$P_2 : 1 \leq i \leq p - 1$ and $l + 1 \leq j \leq n$;
$P_3 : p \leq i \leq m$ and $1 \leq j \leq l$;
$P_4 : p \leq i \leq m$ and $l + 1 \leq j \leq m$;

Let $N_A, N_B, N_{A_k}, N_{B_k}$ be the number of "1"s in matrices A, B and their parts.

Now we will compare the number of "1"s in all parts.
In P_1 we have $N_{A_1} = N_{B_1} = 0$.
In $P_1 \cup P_2$ we have $N_{A_1} + N_{A_2} \geq N_{B_1} + N_{B_2}$ according to the condition of the problem.
In $P_1 \cup P_3$ we have $N_{A_1} + N_{A_3} \geq N_{B_1} + N_{B_3}$ due to our assumption.
In P_4 we have $N_{A_4} \geq N_{B_4}$ because this part of A consists of "1"s only.

Therefore, $N_A > N_B$ which contradicts the condition of the problem.

Problem 5 In a chess tournament, every participant played with each other exactly once, receiving 1 point for a win, 1/2 for a draw and 0 for a loss.

(a) [4] Is it possible that for every player P, the sum of points of the players who were beaten by P is greater than the sum of points of the players who beat P?

(b) [4] Is it possible that for every player P, the first sum is less than the second one?

Solution. Let ε_{ij} be result of the game between i-th and j-th players:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i\text{-th player wins,} \\ -1 & j\text{-th player wins,} \\ 0 & \text{if they have a draw or } i = j. \end{cases}$$

Then (a) asks if it is possible that

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} X_j > 0 \quad \forall i$$

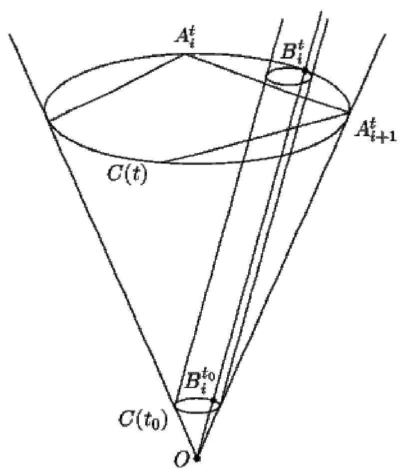
where X_j is a score of j-th player. Multiplying these inequalities by X_i and summing up for all i we conclude that

$$\sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_{ij} X_i X_j > 0.$$

This is impossible since the left-hand expression is 0 because $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$ for all i, j. Part (b) is considered in a similar way.

Problem 6 [8] Prove that there exist 2001 convex polyhedra such that any three of them do not have any common points but any two of them touch each other (i.e., have at least one common boundary point but no common inner points).

Solution. Let us set $N = 2001$ and describe construction of N convex polyhedra satisfying the conditions of the problem.



Let us consider an infinite straight circular cone K with the vertex at the origin and an axis directed along OZ. Let $C(t)$ be a circle with the center $O(t) = (0, 0, t)$ obtained by an intersection of K and a plane $\{z = t\}$. Let us consider a regular N-gon inscribed in $C(1)$, with vertices A_i. Let B_i be the middle points of arcs A_iA_{i+1}, $i = 1, \dots, N$. Let us denote by $A_i^t, B_i^t \in C(t)$ the points of intersection of generating lines OA_i, OB_i with $\{z = t\}$, $t > 0, 1 \le i \le N$. Now we need a following

Lemma. *For any $t_0 > 0$ and any $i, 1 \le i \le N$ there exists $T > t_0$ such that for all $t \ge T$ the parallel translation of $C(t_0)$ by the vector $\overrightarrow{B_i^{t_0} B_i^t}$ lies inside the segment $S_i(t) = A_i^t B_i^t A_{i+1}^t$ (bounded by an arc and a straight segment).*

The proof is based on the fact that the distance from B_i^t to $A_i^t A_{i+1}^t$ is proportional to t.

Now we construct the polyhedra satisfying the conditions of the problem by induction. Let us start with any $t_1 > 0$. We may choose any convex polygon M_1 inside a circle $C(t_1)$ and form an infinite “up” prism P_1 with the base M_1 and lateral edges parallel to OB_1.

Now suppose that we already defined numbers $0 < t_1 < \cdots < t_{n-1}$, constructed convex polygons $M_1, \dots, M_{n-1}$ contained in circles $C(t_1), \dots, C(t_{n-1})$ and formed infinite prims $P_1, \dots, P_{n-1}$ with bases $M_1, \dots, M_{n-1}$ and lateral edges parallel to $OB_1, \dots, OB_{n-1}$ ($n < N$), satisfying the conditions of the problem.

According to the lemma there exists $t_n > t_{n-1}$ such that $M_{n-1}(t_n)$ lies inside the segment $S_{n-1}(t_n)$ (and all the previous polygons would remain in their segments).

Now we need to define M_n. It has to touch each of the previous prisms. In order to find the points of tangency we make a parallel translation of every segment $A_i^{t_n} A_{i+1}^{t_n}$ until it touches the polygon $M_i(t_n)$ ($1 \le i \le n-1$). Now connecting points of tangency we get a convex polygon $M_n(t_n)$ (we choose any point of tangency if there are many; for $n = 2, 3$ we add extra vertices). For future arguments we introduce translated lines $\ell_i(t_n)$; these lines separate M_i and M_n.

Now we form an infinite "up" prism P_n with base $M_n(t_n)$ and lateral edges parallel to OB_n. Construction ends when we use the last segment; at this moment we cut the prisms by a plane $\{z = T > t_N\}$.

Now we need to check that these prisms satisfy conditions of the problem. It is enough to prove that P_n intersects P_i $(i < n)$ only in the plane $\{z = t_n\}$. Assume that this is not true. Then there exists a common point $R \in \{z = t\}$ of these prisms, $t > t_n$.

Let us draw straight lines parallel to OB_n and OB_i through R. These lines intersect plane $\{z = t_n\}$ at points $R_n^{t_n}$ and $R_i^{t_n}$ respectively. Notice that $R_n^{t_n} \in M_n(t_n)$ and $R_i^{t_n} \in M_i(t_n)$. Also notice that vectors $\overrightarrow{R_i^{t_n} R_n^{t_n}}$ and $\overrightarrow{B_i^{t_n} B_n^{t_n}}$ have opposite directions and are not equal to 0.

This cannot be true since $R_i^{t_n}$ and $B_i^{t_n}$ lie on one side of $\ell_i(t_n)$ and $R_n^{t_n}$ and $B_n^{t_n}$ lie on the other side. This contradiction completes the proof.

Problem 7 Several boxes are arranged in a circle. Each box may be empty or may contain one or several chips. A move consists of taking all the chips from some box and distributing them one by one into subsequent boxes clockwise starting from the next box in the clockwise direction.

(a) [4] Suppose that on each move (except for the first one) one must take the chips from the box where the last chip was placed on the previous move. Prove that after several moves the initial distribution of the chips among the boxes will reappear.

(b) [4] Now, suppose that in each move one can take the chips from any box. Is it true that for every initial distribution of the chips you can get any possible distribution?

Solution. (a) Let the *state* of the system described in the problem be defined by the *distribution* of chips between boxes and the number of a box from which we move. Notice that the sequence of states is uniquely defined going forward. Moreover, it is uniquely defined going backwards. Really, if we start with the box where we put the last chip, and go in the counter-clockwise direction, collecting one chip from each box until we get to an empty box, then put all the collected chips in this box, we restore the previous state.

Let us notice that the number of different states is finite. Therefore, we can conclude that the sequence of states is cyclic. Therefore the initial state will repeat itself.

(b) Now the sequence of states is not uniquely defined. Let us mark some box (M). Let I be a state when all chips are collected in M.

Lemma 1. *State I can be obtained from any state A.*

Proof. Let us consider a box (M_{-1}) next to a marked one (M) in a counter-clockwise direction. Starting with that box we would increase the number of chips in M and empty box M_{-1}. Now we do the same with M_{-2}. When it is empty we will return to M_{-1} again. By doing so, each time we increase the number of chips in M and the number of empty boxes until all chips are collected in M. □

Lemma 2. *Let A and B be two states, such that B can be obtained from A. Then A can be obtained from B.*

Proof. Let us consider a case when we get B from A in one step. Starting with the box where the last chip was put and continuing according to part (a) rules, we will come eventually to A. The general case can be considered by induction.

Now it is easy to get the final result. Really, from any two states A and B we can get the state I. Therefore, we can get B from I and thus from A. □