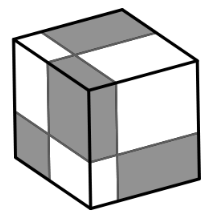
СОРОК ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 10 октября 2021 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

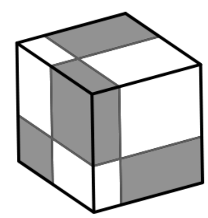
баллы	задачи
4	1. Турнир Городов проводится раз в год. Сейчас год проведения осеннего тура делится на номер турнира: $2021 : 43 = 47$. Сколько ещё раз человечество сможет наблюдать это удивительное явление? *Алексей Заславский*
5	2. Дан куб. Три плоскости, параллельные граням, разделили его на 8 параллелепипедов. Их покрасили в шахматном порядке. Объемы чёрных параллелепипедов оказались равны 1, 6, 8, 12. Найдите объёмы белых параллелепипедов.  *Олег Смирнов*
5	3. У пирата есть пять мешочков с монетами, по 30 монет в каждом. Он знает, что в одном лежат золотые монеты, в другом — серебряные, в третьем — бронзовые, а в каждом из двух оставшихся поровну золотых, серебряных и бронзовых. Можно одновременно достать любое число монет из любых мешочков и посмотреть, что это за монеты (вынимаются монеты один раз). Какое наименьшее число монет нужно достать, чтобы наверняка узнать содержимое хотя бы одного мешочка? *Михаил Евдокимов*
5	4. Выпуклый n-угольник ($n > 4$) обладает таким свойством: если диагональ отсекает от него треугольник, то этот треугольник равнобедренный. Докажите, что среди любых четырёх сторон этого n-угольника есть хотя бы две равных. *Максим Дидин*
5	5. В турнире участвовали 20 шахматистов. Каждый играл с каждым один раз белыми и один раз чёрными. Обязательно ли найдутся такие два шахматиста, что один из них выиграл не меньше партий белыми и не меньше партий чёрными, чем другой? *Борис Френкин*

СОРОК ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 10 октября 2021 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

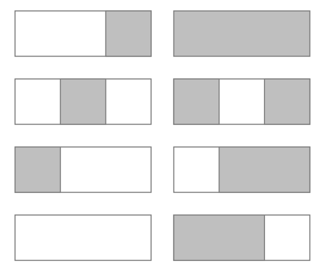
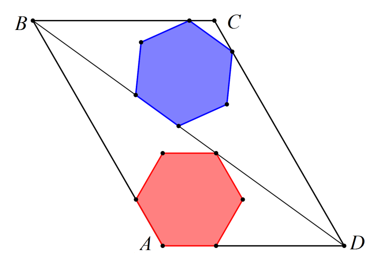
баллы	задачи
3	1. Натуральное число k назовем *интересным*, если произведение первых k простых чисел делится на k (например, произведение первых двух простых чисел — это $2 \cdot 3 = 6$, и 2 — число интересное). Какое наибольшее количество интересных чисел может идти подряд? *Борис Френкин*
4	2. Дан куб. Три плоскости, параллельные граням, разделили его на 8 параллелепипедов. Их покрасили в шахматном порядке. Объемы чёрных параллелепипедов оказались равны 1, 6, 8, 12. Найдите объёмы белых параллелепипедов.  *Олег Смирнов*
6	3. В белом клетчатом квадрате 2021×2021 требуется закрасить чёрным две клетки. После этого через каждую минуту одновременно закрашиваются чёрным все клетки, которые граничат по стороне хоть с одной из уже закрашенных. Ваня выбрал две начальные клетки так, чтобы весь квадрат закрасился как можно быстрее. Через сколько минут закрасился квадрат? *Иван Ященко*
6	4. Дан отрезок AB. Точки X, Y, Z в пространстве выбираются так, чтобы ABX был правильным треугольником, а $ABYZ$ — квадратом. Докажите, что ортоцентры всех получающихся таким образом треугольников XYZ попадают на некоторую фиксированную окружность. *Александр Матвеев*
6	5. Дан отрезок $[0; 1]$. За ход разрешается разбить любой из имеющихся отрезков точкой на два новых отрезка и записать на доску произведение длин этих двух новых отрезков. Докажите, что ни в какой момент сумма чисел на доске не превысит $1/2$. *Михаил Лукин*

СОРОК ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 24 октября 2021 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
5	1. В ряд записаны $n > 2$ различных ненулевых чисел, причём каждое следующее больше предыдущего на одну и ту же величину. Обратные к этим n числам тоже удалось записать в ряд (возможно, в другом порядке) так, что каждое следующее больше предыдущего на одну и ту же величину (возможно, иную, чем в первом случае). Чему могло равняться n? *Алексей Заславский*
6	2. На столе лежат 8 всевозможных горизонтальных полосок 1×3 из трёх квадратиков 1×1, каждый из которых либо белый, либо серый (см. рисунок). Разрешается переносить полоски в любых направлениях на любые (не обязательно целые) расстояния, не поворачивая и не переворачивая. Можно ли расположить полоски на столе так, чтобы все белые точки образовали многоугольник, ограниченный замкнутой несамопересекающейся ломаной, и все серые — тоже? (Полоски не должны перекрываться.)  *Михаил Ильинский*
7	3. В прямоугольный треугольник с гипотенузой длины 1 вписали окружность. Через точки её касания с его катетами провели прямую. Отрезок какой длины может высекать на этой прямой окружность, описанная около исходного треугольника? *Максим Волчкевич*
8	4. На доске написано число 7. Петя и Вася по очереди приписывают к текущему числу по одной цифре, начинает Петя. Цифру можно приписать в начало числа (кроме нуля), в его конец или между любыми двумя цифрами. Побеждает тот, после чьего хода число на доске станет точным квадратом. Может ли кто-нибудь гарантированно победить, как бы ни играл соперник? *Александр Грибалко*
9	5. Параллелограмм $ABCD$ разделён диагональю BD на два равных треугольника. В треугольник ABD вписан правильный шестиугольник так, что две его соседние стороны лежат на AB и AD, а одна из вершин — на BD. В треугольник CBD вписан правильный шестиугольник так, что две его соседние вершины лежат на CB и CD, а одна из сторон — на BD. Какой из шестиугольников больше?  *Константин Кноп*
9	6. Пусть $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа x (то есть наибольшее целое число, не превосходящее x). Докажите для любых натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ неравенство $$\left\lfloor \frac{a_1^2}{a_2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2^2}{a_3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{a_n^2}{a_1} \right\rfloor \geqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$ *Максим Дидин*
12	7. На столе в ряд лежат 20 плюшек с сахаром и 20 с корицей в произвольном порядке. Малыш и Карлсон берут их по очереди, начинает Малыш. За ход можно взять одну плюшку с любого края. Малыш хочет, чтобы ему в итоге досталось по десять плюшек каждого вида, а Карлсон пытается ему помешать. При любом ли начальном расположении плюшек Малыш может достичь своей цели, как бы ни действовал Карлсон? *Александр Грибалко*

СОРОК ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 24 октября 2021 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

5 1. Мудрецам A, B, C, D сообщили, что числа $1, 2, \ldots, 12$ написаны по одному на 12 карточках и что эти карточки будут розданы им по три, причём каждый увидит лишь свои карточки. После раздачи мудрецы по очереди сказали следующее.

A: «На одной из моих карточек — число 8».

B: «Все числа на моих карточках простые».

C: «А все числа на моих — составные, причём имеют общий простой делитель».

D: «Тогда я знаю, какие карточки у каждого из вас».

Какие карточки у A, если все сказали правду?

Михаил Евдокимов

7 2. В одной из клеток шахматной доски 10×10 стоит ладья. Переходя каждым ходом в соседнюю по стороне клетку, она обошла все клетки доски, побывав в каждой ровно по одному разу. Докажите, что для каждой главной диагонали доски верно следующее утверждение: в маршруте ладьи есть два последовательных хода, первым из которых она ушла с этой диагонали, а следующим — вернулась на неё. (Главная диагональ ведёт из угла доски в противоположный угол.)

Александр Грибалко

7 3. На плоскости сидят кузнечик Коля и 2020 его товарищей. Коля собирается совершить прыжок через каждого из остальных кузнечиков (в произвольном порядке) так, что начальная и конечная точка каждого прыжка симметричны относительно перепрыгиваемого кузнечика. Назовём точку *финишной*, если Коля может в неё попасть после 2020-го прыжка. При каком наибольшем числе N найдётся начальная расстановка кузнечиков, для которой имеется ровно N различных возможных финишных точек?

Михаил Святловский

7 4. При каком наименьшем k среди любых трёх ненулевых действительных чисел можно выбрать такие два числа a и b, что $|a-b| \leqslant k$ или $|\frac{1}{a} - \frac{1}{b}| \leqslant k$?

Максим Дидин

9 5. Внутри параллелограмма $ABCD$ взята такая точка P, что $\angle PDA = \angle PBA$. Пусть ω_1 — вневписанная окружность треугольника PAB, лежащая напротив вершины A. Пусть ω_2 — вписанная окружность треугольника PCD. Докажите, что одна из общих касательных к ω_1 и ω_2 параллельна AD.

Иван Фролов

10 6. На столе в ряд лежат 20 плюшек с сахаром и 20 с корицей в произвольном порядке. Малыш и Карлсон берут их по очереди, начинает Малыш. За ход можно взять одну плюшку с любого края. Малыш хочет, чтобы ему в итоге досталось по десять плюшек каждого вида, а Карлсон пытается ему помешать. При любом ли начальном расположении плюшек Малыш может достичь своей цели, как бы ни действовал Карлсон?

Александр Грибалко

7. Клетчатый квадрат 2×2 накрыт двумя треугольниками. Обязательно ли

6 а) хоть одна из четырёх его клеток целиком накрыта одним из этих треугольников;

6 б) в один из этих треугольников можно поместить квадрат со стороной 1?

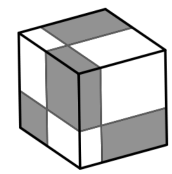
Александр Шаповалов

Базовый вариант, 8 – 9 классы

1 (4 балла). *Турнир Городов проводится раз в год. Сейчас год проведения осеннего тура делится на номер турнира:* $2021 : 43 = 47$. *Сколько ещё раз человечество сможет наблюдать это удивительное явление?* *(Алексей Заславский)*

Ответ: ещё 4 раза. Так как сейчас 43-й Турнир, то осенний тур n-го Турнира проходит в году $46 \cdot 43 + n$. Число $46 \cdot 43 + n$ делится на n тогда и только тогда, когда $46 \cdot 43 = 2 \cdot 23 \cdot 43$ делится на n. У числа $2 \cdot 23 \cdot 43$ есть 4 делителя, больших чем 43 — это $2 \cdot 23$, $2 \cdot 43$, $23 \cdot 43$ и $2 \cdot 23 \cdot 43$.

Номер турнира N на $2021 - 43 = 1978$ меньше номера года M, и так будет всегда. Поэтому $M : N = 1 + 1978 : N$. Таким образом, требуется, чтобы число 1978 нацело делилось на номер очередного Турнира. Но $1978 = 43 \cdot 23 \cdot 2$, то есть оно делится (из чисел, больших 43) на 46, 86, 989 и на само себя. Поэтому ответ: ещё 4 раза, в 2024, 2064, 2967 и 3956 годах.



2 (5 баллов). *Дан куб. Три плоскости, параллельные граням, разделили его на 8 параллелепипедов. Их покрасили в шахматном порядке. Объёмы чёрных параллелепипедов оказались равны 1, 6, 8, 12. Найдите объёмы белых параллелепипедов.* *(Олег Смирнов)*

Ответ: 2, 3, 4, 24. Обозначим точку пересечения трёх плоскостей, разрезающих куб, через A. Заметим, что объём любого из 8 полученных параллелепипедов равен произведению трёх его рёбер, выходящих из A. Пусть мы хотим найти объём какого-то белого параллелепипеда α. Перемножим объёмы трёх чёрных параллелепипедов, примыкающих к α. Мы получим произведение длин 9 отрезков: рёбра параллелепипеда α, выходящие из A, будут входить в произведение по два раза, а рёбра противоположного к α чёрного параллелепипеда β, выходящие из A, — по одному разу. Тогда, поделив полученное число на объём β, мы получим квадрат объёма α.

Таким образом, перемножая тройки чисел из условия и деля на четвёртое, мы получим квадраты объёмов белых параллелепипедов; останется извлечь корни.

3 (5 баллов). *У пирата есть пять мешочков с монетами, по 30 монет в каждом. Он знает, что в одном лежат золотые монеты, в другом — серебряные, в третьем — бронзовые, а в каждом из двух оставшихся поровну золотых, серебряных и бронзовых. Можно одновременно достать любое число монет из любых мешочков и посмотреть, что это за монеты (вынимаются монеты один раз). Какое наименьшее число монет нужно достать, чтобы наверняка узнать содержимое хотя бы одного мешочка?* *(Михаил Евдокимов)*

Ответ: 5 монет.

Пример. Достанем по одной монете из каждого мешочка. Среди этих пяти монет есть монеты всех трёх видов, поэтому какого-то вида есть только одна монета. Если она, например, золотая, то её достали из мешочка с золотыми монетами. Действительно, для каждой монеты из «смешанного» мешочка есть парная из соответствующего «однородного» мешочка.

Оценка. Пусть мы достали только 4 монеты (или меньше). Заметим, что не имеет смысла доставать больше одной монеты из одного и того же мешочка, так как они могут оказаться одинаковыми, а тогда никакой дополнительной информации мы не получим. Поэтому можно считать, что мы достали по одной монете из четырёх разных мешочков. Тогда мы могли достать монеты З, З, С, Б, и в этом случае есть по крайней мере два варианта распределения соответствующих мешочков: З, Смеш, С, Смеш, Б и Смеш, З, Смеш, Б, С, не совпадающих ни в одной из позиций (последним указан мешочек, из которого монеты не доставались).

4 (5 баллов). *Выпуклый n-угольник ($n > 4$) обладает таким свойством: если диагональ отсекает от него треугольник, то этот треугольник равнобедренный. Докажите, что среди любых четырёх сторон этого n-угольника есть хотя бы две равных.* *(Максим Дидин)*

Рассмотрим группы равных сторон, расположенных подряд. Заметим, что на стыке таких групп находится острый угол n-угольника — угол при основании равнобедренного треугольника. Но в многоугольнике не может быть больше трёх острых углов (сумма внешних углов равна 360°, поэтому среди них не больше трёх тупых), значит, этих групп не больше трёх. Следовательно, среди каждых четырёх сторон найдутся две из одной группы, то есть равные.

5 (5 баллов). *В турнире участвовали 20 шахматистов. Каждый играл с каждым один раз белыми и один раз чёрными. Обязательно ли найдутся такие два шахматиста, что один из них выиграл не меньше партий белыми и не меньше партий чёрными, чем другой? (Борис Френкин)*

Ответ: обязательно. Будем говорить, что шахматист A не слабее шахматиста B, если A выиграл и белыми, и чёрными не меньше партий, чем B. Предположим, что такой пары нет.

Если у каких-то двух игроков одинаковое число побед белыми, один из них не слабее другого. То же верно, если у каких-то двух игроков одинаковое число побед чёрными. Значит, число побед белыми у всех разное, и число побед чёрными — тоже. Отсюда следует, что количества побед белыми у 20 игроков равны числам 19, 18, ..., 2, 1 и 0, и то же для количеств побед чёрными. Пусть 19 партий белыми выиграл A, а 19 партий чёрными выиграл другой шахматист B. Но тогда игру A с B, где A играл белыми, а B — чёрными, выиграли и A, и B. Такая ситуация невозможна, поэтому 19 партий белыми и чёрными выиграл один и тот же шахматист. Но тогда он не слабее всех остальных. Противоречие.

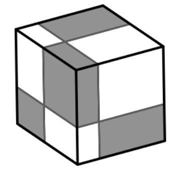
Базовый вариант, 10 – 11 классы

1 (3 балла). *Натуральное число k назовём* интересным*, если произведение первых k простых чисел делится на k (например, произведение первых двух простых чисел — это $2 \cdot 3 = 6$, и 2 — число интересное). Какое наибольшее количество интересных чисел может идти подряд?*

(Борис Френкин)

Ответ: 3 числа. *Оценка.* Число интересно в точности тогда, когда оно свободно от квадратов, то есть каждое простое число появляется не больше одного раза в его разложении на простые. Теперь заметим, что числа, кратные четырём, не свободны от квадратов. *Примеры.* 1, 2, 3; 5, 6, 7.

2 (4 балла). *Дан куб. Три плоскости, параллельные граням, разделили его на 8 параллелепипедов. Их покрасили в шахматном порядке. Объёмы чёрных параллелепипедов оказались равны 1, 6, 8, 12. Найдите объёмы белых параллелепипедов. (Олег Смирнов)*



Ответ: 2, 3, 4, 24. Обозначим точку пересечения трёх плоскостей, разрезающих куб, через A. Заметим, что объём любого из 8 полученных параллелепипедов равен произведению трёх его рёбер, выходящих из A. Пусть мы хотим найти объём какого-то белого параллелепипеда α. Перемножим объёмы трёх чёрных параллелепипедов, примыкающих к α. Мы получим произведение длин 9 отрезков: рёбра параллелепипеда α, выходящие из A, будут входить в произведение по два раза, а рёбра противоположного к α чёрного параллелепипеда β, выходящие из A, — по одному разу. Тогда, поделив полученное число на объём β, мы получим квадрат объёма α.

Таким образом, перемножая тройки чисел из условия и деля на четвёртое, мы получим квадраты объёмов белых параллелепипедов; останется извлечь корни.

3 (6 баллов). *В белом клетчатом квадрате 2021×2021 требуется закрасить чёрным две клетки. После этого через каждую минуту одновременно закрашиваются чёрным все клетки, которые граничат по стороне хоть с одной из уже закрашенных. Ваня выбрал две начальные клетки так, чтобы весь квадрат закрасился как можно быстрее. Через сколько минут закрасился квадрат?*

(Иван Ященко)

Ответ: через 1515 минут. Занумеруем строки и столбцы числами от -1010 до 1010. Через n минут будут закрашены клетки, до которых хромая ладья (за ход сдвигается на соседнюю клетку) дойдёт от одной из исходных клеток не более чем за n ходов.

Пример. Закрасим клетки $A(-505, 0)$ и $B(505, 0)$. За 1515 ходов ладья дойдёт из B до любой клетки правой половины доски (клетки (x, y) с неотрицательным x): потребуется не более 505 ходов по горизонтали и не более 1010 по вертикали. Аналогично из A ладья дойдёт до любой клетки левой половины.

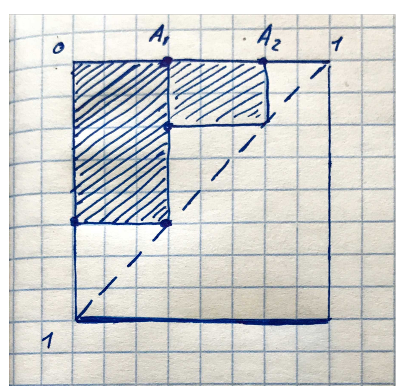
Оценка. Назовём *расстоянием* между клетками сумму расстояний между ними по вертикали и по горизонтали. Оно равно минимальному числу ходов, за которое хромая ладья сможет дойти из одной клетки в другую (и поэтому удовлетворяет «неравенству треугольника»). Пусть все клетки будут чёрными через 1514 минут. Противоположные угловые клетки не могут быть «обслужены» одной ладьёй: расстояние между ними больше чем $2 \cdot 1514$. Поэтому каждая ладья «обслужила» две угловые клетки с одной стороны, например ладья из клетки A — обе левые: $(-1010, \pm 1010)$, а ладья из клетки B — обе правые: $(1010, \pm 1010)$. Но тогда вторая ладья не успела дойти ни до одной из клеток $(0, \pm 1010)$: расстояние от такой клетки до противоположной угловой клетки равно $3030 > 2 \cdot 1514$. Аналогично и первая ладья не дошла до этих клеток. Противоречие.

4 (6 баллов). *Дан отрезок AB. Точки X, Y, Z в пространстве выбираются так, чтобы ABX был правильным треугольником, а $ABYZ$ — квадратом. Докажите, что ортоцентры всех получающихся таким образом треугольников XYZ попадают на некоторую фиксированную окружность.* *(Александр Матвеев)*

Пусть $AB = 2$, O и M — середины отрезков AB и YZ соответственно, H — ортоцентр треугольника XYZ. Поскольку треугольник XYZ равнобедренный, точка H лежит на серединном перпендикуляре к стороне YZ, то есть в плоскости π, перпендикулярной AB и проходящей через O. Точка X лежит на окружности ω радиуса $\sqrt{3}$ с центром O, лежащей в π. Пусть прямая XM второй раз пересекает ω в точке W (если XM касается ω, то точки X и W совпадают), а прямая OM пересекает ω в точках P и Q. Тогда $MX \cdot MW = MP \cdot MQ = (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$.

Пусть YN — высота треугольника XYZ. Прямая YN пересекает прямую XM в ортоцентре H. Заметим, что прямоугольные треугольники HYM и YXM подобны, так что $MH : MY = MY : MX$. Поскольку $MY = 1$, то $MX \cdot MH = 1$. Поэтому $MH = MW$, а так как обе точки H и W лежат на луче MX, они совпадают. Таким образом, H лежит на ω.

5 (6 баллов). *Дан отрезок $[0; 1]$. За ход разрешается разбить любой из имеющихся отрезков точкой на два новых отрезка и записать на доску произведение длин этих двух новых отрезков. Докажите, что ни в какой момент сумма чисел на доске не превысит $1/2$.* *(Михаил Лукин)*



Первое решение. Построим на нашем отрезке как на стороне квадрат и проведём в нём диагональ, противоположную точке 0 (см. рисунок). Отметим точку A_1, разбив исходный отрезок на два. Произведение длин полученных отрезков равно площади заштрихованного прямоугольника, две противоположные вершины которого — 0 и точка на диагонали, лежащая на проведённом через A_1 перпендикуляре к стороне квадрата. Добавляя новые точки, мы будем добавлять на картинке новые прямоугольники, которые не накладываются друг на друга и все лежат не ниже диагонали. Поэтому их суммарная площадь (равная сумме чисел на доске) меньше половины площади квадрата, то есть $\frac{1}{2}$.

Второе решение. Будем писать на доске удвоенные произведения длин и докажем, что их сумма меньше 1. Заведём вторую доску, на которой будем записывать квадраты всех отрезков разбиения. Вначале на ней записано число 1. В дальнейшем при разбиении отрезка длины a на отрезки длин b

и c на первой доске появится число $2bc$, а на второй число $a^2 = (b+c)^2$ заменится на b^2 и c^2. Таким образом, общая сумма чисел на обеих досках не изменится, то есть останется равной 1. Поскольку сумма чисел на второй доске положительна, сумма чисел на первой всегда будет меньше 1.

Замечание. Усилить неравенство нельзя. Действительно, разделим отрезок пополам, затем — каждый из отрезков пополам, снова каждый из отрезков пополам, и т.д. Сумма чисел на доске будет равна $\frac{1}{4}$, затем $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, затем $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$, и т.д., то есть может быть сколь угодно близка к $\frac{1}{2}$.

Сложный вариант, 8 – 9 классы

1 (5 баллов). *В ряд записаны $n > 2$ различных ненулевых чисел, причём каждое следующее больше предыдущего на одну и ту же величину. Обратные к этим n числам тоже удалось записать в ряд (возможно, в другом порядке) так, что каждое следующее больше предыдущего на одну и ту же величину (возможно, иную, чем в первом случае). Чему могло равняться n?*

(Алексей Заславский)

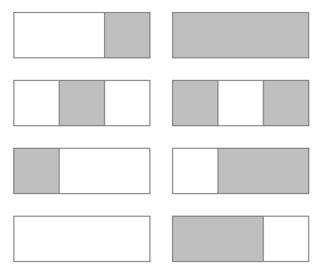
Ответ: 3 или 4. *Примеры:* $-1, \frac{1}{2}, 2$ и $-3, -1, 1, 3$.

Оценка. Если чисел больше 4, то среди них есть три одного знака (пусть положительных). Выберем три наименьших их них: $a-d$, a, $a+d$, где $0 < d < a$. Обратные числа будут идти в обратном порядке: $\frac{1}{a-d} > \frac{1}{a} > \frac{1}{a+d}$, но $\frac{1}{a-d} - \frac{1}{a} = \frac{d}{a(a-d)} \neq \frac{d}{a(a+d)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+d}$.

Замечание. Оба примера — единственные с точностью до постоянного множителя.

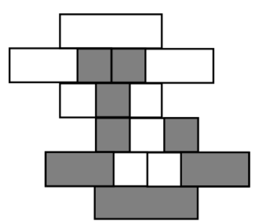
2 (6 баллов). *На столе лежат 8 всевозможных горизонтальных полосок 1×3 из трёх квадратиков 1×1, каждый из которых либо белый, либо серый (см. рисунок). Разрешается переносить полоски в любых направлениях на любые (не обязательно целые) расстояния, не поворачивая и не переворачивая. Можно ли расположить полоски на столе так, чтобы все белые точки образовали многоугольник, ограниченный замкнутой несамопересекающейся ломаной, и все серые — тоже? (Полоски не должны перекрываться.)*

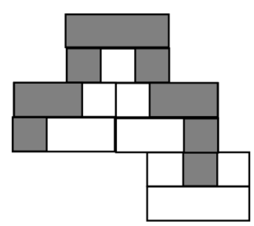
(Михаил Ильинский)



Ответ: можно.

См. примеры на рисунке.



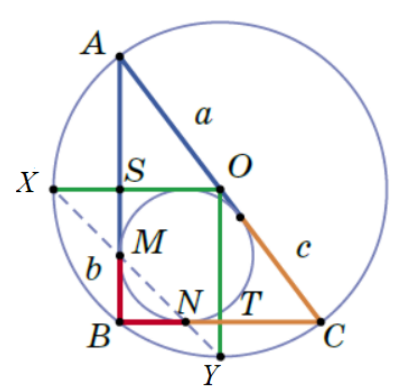


3 (7 баллов). *В прямоугольный треугольник с гипотенузой длины 1 вписали окружность. Через точки её касания с его катетами провели прямую. Отрезок какой длины может высекать на этой прямой окружность, описанная около исходного треугольника?*

(Максим Волчкевич)

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Первое решение. Пусть ABC — наш треугольник с прямым углом B, точка O — центр его описанной окружности, M и N — точки касания вписанной окружности с катетами AB и BC, X и Y — середины дуг AB и BC соответственно. Достаточно доказать, что M и N лежат на XY. Опустим из O перпендикуляры OS и OT на катеты AB и BC и продлим перпендикуляры до пересечения с описанной окружностью в точках X и Y соответственно. Пусть a, b, c — длины касательных из точек A, B, C к вписанной окружности.

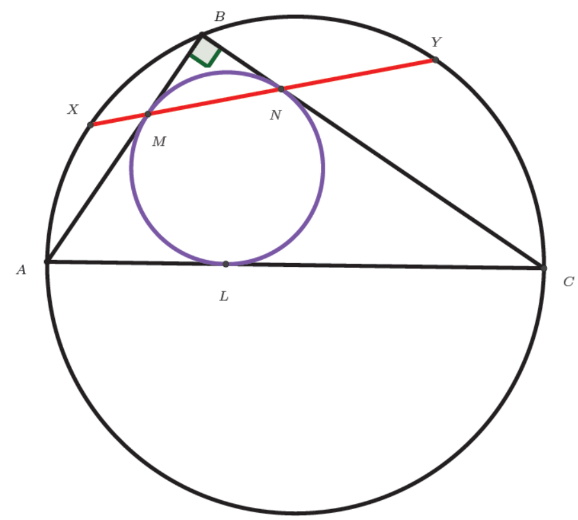


Треугольник XOY — равнобедренный прямоугольный. Заметим, что $OX = \frac{a+c}{2}$, $OS = \frac{b+c}{2}$, откуда $XS = OX - OS = \frac{a-b}{2}$. Если M' — точка пересечения XY с AB, то $SM' = SX = \frac{a-b}{2}$, откуда $SM' + MB = \frac{a-b}{2} + b = \frac{a+b}{2} = BS$, а значит, M' и M совпадают. Аналогично, N лежит на XY.

Второе решение. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC ($\angle C = 90°$). Точки касания вписанной окружности с катетами, очевидно, лежат на серединном перпендикуляре к отрезку IC. По известной лемме о трезубце на этом же серединном перпендикуляре лежат середины K и L дуг AC и BC. Очевидно, дуга KL равна $45°$.

Третье решение. Воспользуемся так называемой *Задачей 255*:

Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон AB и BC в точках M и N соответственно. Тогда проекция K точки C на биссектрису угла BAC лежит на прямой MN.



Пусть точка P — проекция точки A на биссектрису угла C, точка Q — проекция точки C на биссектрису угла A. По Задаче 255 точки P и Q лежат на прямой MN. Так как $90° = \angle ABC = \angle APC = \angle AQC$, то точки P и Q совпадают соответственно с X и Y. Значит, PQ — искомая хорда. Так как AQ и CP — биссектрисы, то P и Q — середины дуг AB и BC соответственно. Тогда центральный угол окружности, опирающийся на хорду PQ, прямой, и поэтому $PQ = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Четвёртое решение. Обозначения те же, что в предыдущем решении, а данная хорда обозначается XY (точки на прямой MN идут в порядке $X - M - N - Y$). Пусть L — точка касания вписанной окружности со стороной AC. Пусть $1 = BM = BN$ (а не $AC = 1$!), тогда $NM = \sqrt{2}$, $AM = AL = a$, $CN = CL = b$, $MX = x$, $NY = y$.

Выразив двумя способами площадь треугольника ABC (как $\frac{AB \cdot BC}{2}$ и как pr), получим $\frac{(a+1)(b+1)}{2} = (1 + a + b) \cdot 1$, откуда $\boxed{ab = a + b + 1}$.

Запишем степень точки M относительно окружности: $\boxed{a = x(y + \sqrt{2})}$ (тот же результат можно получить, записав подобие треугольников MXA и MBY) и степень точки N: $\boxed{b = y(x + \sqrt{2})}$. Теперь подставляем a и b:

$$\begin{aligned} xy(x+\sqrt{2})(y+\sqrt{2}) = ab = a + b + 1 &= 2xy + \sqrt{2}(x+y) + 1,\\ xy(xy + \sqrt{2}(x+y) + 2) &= 2xy + \sqrt{2}(x+y) + 1,\\ \sqrt{2}(x+y)(xy-1) + (xy)^2 - 1 &= 0,\\ (xy + 1 + \sqrt{2}(x+y))(xy-1) &= 0,\\ xy &= 1. \end{aligned}$$

Подставляем полученное значение $xy = 1$:

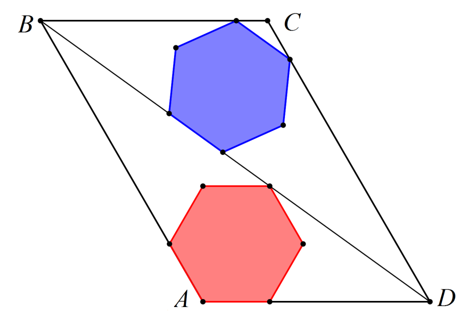
$$\begin{aligned} a = x(y+\sqrt{2}) &= 1 + \sqrt{2}x,\\ b = y(x+\sqrt{2}) &= 1 + \sqrt{2}y,\\ a + b &= \sqrt{2}(x + y + \sqrt{2}),\\ AC &= \sqrt{2}XY. \end{aligned}$$

4 (8 баллов). *На доске написано число 7. Петя и Вася по очереди приписывают к текущему числу по одной цифре, начинает Петя. Цифру можно приписать в начало числа (кроме нуля), в его конец или между любыми двумя цифрами. Побеждает тот, после чьего хода число на доске станет точным квадратом. Может ли кто-нибудь гарантированно победить, как бы ни играл соперник?* *(Александр Грибалко)*

Ответ: нет. На первом ходу Вася не проиграет, так как нет точных двузначных квадратов с цифрой 7. Покажем, что далее каждый может приписать в конец текущего числа 2 или 3 так, чтобы соперник не выиграл следующим ходом.

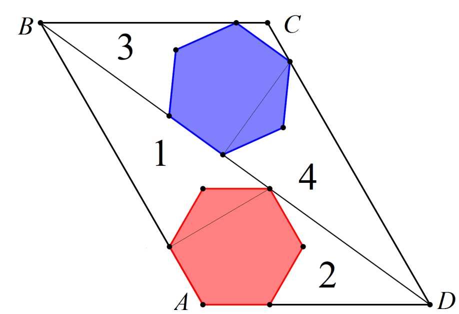
Пусть у нас было число A, и соперник может сделать квадрат, приписав цифру как к числу $\overline{A2}$, так и к числу $\overline{A3}$. Поскольку точные квадраты не оканчиваются ни на 2, ни на 3, он припишет цифру в конец: скажем, x — в первом случае и y — во втором. Тогда оба числа $\overline{A2x}$ и $\overline{A3y}$ — точные квадраты, разность между которыми меньше 20. Но каждое из этих чисел хотя бы трёхзначное, и тогда разность между соседними точными квадратами не меньше $11^2 - 10^2 > 20$. Противоречие.

5 (9 баллов). *Параллелограмм $ABCD$ разделён диагональю BD на два равных треугольника. В треугольник ABD вписан правильный шестиугольник так, что две его соседние стороны лежат на AB и AD, а одна из вершин — на BD. В треугольник CBD вписан правильный шестиугольник так, что две его соседние вершины лежат на CB и CD, а одна из сторон — на BD. Какой из шестиугольников больше? (Константин Кноп)*

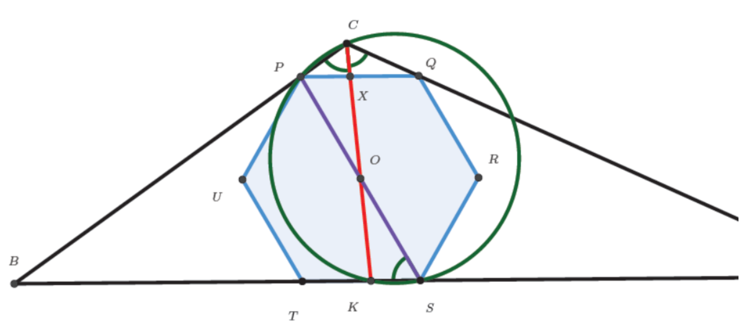


Ответ: тот, который примыкает к вершине A.

Первое решение (Макар Чудновский, 7 класс). Параллелограмм разделён на два данных шестиугольника, четыре невыпуклых четырёхугольника, которые мы обозначили на рисунке цифрами 1, 2, 3, 4, и треугольник, примыкающий к вершине C. Заметим, что четырёхугольники 1 и 4 подобны — они получаются вырезанием из двух подобных прямоугольных треугольников равнобедренных треугольников с углом 120° при вершине. Аналогично, подобны четырёхугольники 2 и 3. Заметим, что коэффициенты подобия равны отношению сторон данных шестиугольников. Но площади половинок параллелограмма ABD и CBD равны, причём половинка ABD состоит из первого шестиугольника и четырёхугольников 1 и 2, а вторая — из второго шестиугольника, четырёхугольников 3 и 4 и ещё белого треугольника. Значит, сторона шестиугольника, примыкающего к вершине A, больше.



Второе решение. Диагональ красного шестиугольника совпадает с биссектрисой треугольника ABD, которая равна биссектрисе CK треугольника BCD. Пусть синий шестиугольник — это $PQRSTU$, как на рисунке. Требуется сравнить диагонали CK и PS правильных шестиугольников. Они пересекаются в центре O шестиугольника, так как четырёхугольник $PCQO$ вписанный, CK биссектриса и поэтому делит дугу POQ пополам, то есть проходит через O.



Заметим, что прямая CO пересекает отрезок PQ, поэтому (из симметрии относительно O) она пересекает и отрезок TS. Углы PCK и PSK равны по 60°. Далее есть несколько способов.

Первый способ. Треугольники PCO и KSO подобны по двум углам. Пусть $PO = SO = a$, $OK = 1$, тогда $OC = a^2$. В треугольнике PCO: $\angle P > 60^\circ = \angle C$, значит, $CO > PO$ и поэтому $a > 1$. Получаем $PS = 2a$, $CK = a^2 + 1$, их разность $CK - PS = (a-1)^2 > 0$.

Второй способ. Заметим, что точки P, C, S, K лежат на одной окружности. Требуется сравнить её хорды CK и PS — диагонали правильных шестиугольников. Чтобы сравнить хорды, достаточно сравнить величины меньших дуг, которые они стягивают. Не умаляя общности, $\angle CBD \geqslant \angle CDB$, тогда угол CKS не острый, и равный ему угол CPS — тоже не острый. Тогда тупыми будут углы PKS и CPK, откуда дуги PKS и CPK — меньше полуокружности, их нам и надо сравнить.

Общую часть этих дуг можно выбросить и сравнить дуги CP и KS, а для этого достаточно сравнить хорды CP и KS. Пусть X — точка пересечения PQ и CK. Тогда $PX = SK$ (в силу симметрии относительно O). Заметим, что $\angle CPX = \angle CBK < 60^\circ$ (так как угол B параллелограмма равен 60°), $\angle PCX = 60^\circ$, откуда $\angle CXP > 60^\circ$. Значит, $SK = PX < PC$, так как в треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

Третий способ. Из той же окружности получаем, что

$$CK = OC + OK \geqslant 2\sqrt{OC \cdot OK} = 2\sqrt{OP \cdot OS} = 2OP = PS$$

(равенства нет, потому что $OE < OP < OC$).

6 (9 баллов). *Пусть $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа x (то есть наибольшее целое число, не превосходящее x). Докажите для любых натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ неравенство*

$$\left\lfloor \frac{a_1^2}{a_2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2^2}{a_3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{a_n^2}{a_1} \right\rfloor \geqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

(Максим Дидин)

Перепишем очевидное неравенство $(a_k - a_{k+1})^2 \geqslant 0$ в виде $\frac{a_k^2}{a_{k+1}} \geqslant 2a_k - a_{k+1}$. Так как число справа — целое, то и $\left\lfloor \frac{a_k^2}{a_{k+1}} \right\rfloor \geqslant 2a_k - a_{k+1}$. Сложив такие неравенства, получим требуемое.

7 (12 баллов). *На столе в ряд лежат 20 плюшек с сахаром и 20 с корицей в произвольном порядке. Малыш и Карлсон берут их по очереди, начинает Малыш. За ход можно взять одну плюшку с любого края. Малыш хочет, чтобы ему в итоге досталось по десять плюшек каждого вида, а Карлсон пытается ему помешать. При любом ли начальном расположении плюшек Малыш может достичь своей цели, как бы ни действовал Карлсон?* *(Александр Грибалко)*

Ответ: при любом.

Пронумеруем плюшки в ряду числами от 1 до 40. Заметим, что у Малыша всегда есть возможность взять плюшку с номером любой чётности, а после каждого его хода Карлсон вынужден брать плюшку с номером другой чётности.

Пусть среди плюшек с нечётными номерами не меньше десяти с сахаром (если с корицей, то рассуждения аналогичны). Тогда Малыш начинает с того, что берёт плюшки с нечётными номерами и после каждого хода Карлсона вычисляет такую величину: количество полученных плюшек с сахаром + количество оставшихся на столе плюшек с сахаром с чётными номерами. В начальный момент эта величина не больше 10, а если Малыш будет брать плюшки только с нечётными номерами, то в конце она будет не меньше 10. При этом после каждой пары ходов Малыша и Карлсона эта величина изменяется не более чем на 1. Следовательно, в какой-то момент (возможно, начальный) она будет равна 10. После этого Малыш может брать только плюшки с чётными номерами и в итоге получит ровно 10 плюшек с сахаром, а значит, и 10 плюшек с корицей, что и требуется.

Замечание. Верно более общее утверждение: если в ряд лежит чётное число плюшек, и из них на нечётных местах ровно L с сахаром, а на чётных — ровно R с сахаром, то для всякого k между (нестрого) числами R и L Малыш может действовать так, чтобы взять ровно k плюшек с сахаром.

Для решения исходной задачи достаточно доказать это утверждение, ибо в нашем случае $R + L = 20$ и одно из чисел не меньше 10, а другое не больше 10.

Доказываем индукцией по количеству плюшек. Если их две, то утверждение очевидно. Шаг индукции: покрасим плюшки в шахматном порядке, чтобы нечётные стали белыми; если $k = L$, то Малышу достаточно каждым ходом есть белую плюшку, если $k = R$ — то чёрную. Если же k заключено строго между L и R, то Малыш может сделать первый ход произвольным образом, а далее добиться своего по предположению индукции. В самом деле, не умаляя общности, $L < k < R$, тогда белых плюшек с сахаром останется либо L, либо $L-1$, чёрных — либо R, либо $R-1$, а Малышу далее надо взять либо k, либо $k-1$ плюшку с сахаром, причём $L-1 < L \leqslant k-1 < k \leqslant R-1 < R$.

Сложный вариант, 10 – 11 классы

1 (5 баллов). *Мудрецам A, B, C, D сообщили, что числа $1, 2, \ldots, 12$ написаны по одному на 12 карточках и что эти карточки будут розданы им по три, причём каждый увидит лишь свои карточки. После раздачи мудрецы по очереди сказали следующее.*
A: «На одной из моих карточек — число 8».
B: «Все числа на моих карточках простые».
C: «А все числа на моих — составные, причём имеют общий простой делитель».
D: «Тогда я знаю, какие карточки у каждого из вас».
Какие карточки у A, если все сказали правду? *(Михаил Евдокимов)*

Ответ: 1, 8 и 9. **Решение.** Простые числа могут быть только у A, B и D. На карточках B — три из пяти возможных простых чисел (2, 3, 5, 7, 11). Остальные два простых числа — у D, иначе он не знал бы, какие именно из простых чисел есть у B, а какие — у A. На карточках C могут быть тройки (4, 6, 10), (4, 6, 12), (4, 10, 12), (6, 10, 12) или (6, 9, 12). Только если у D есть 6 или 12, он может определить, какая именно тройка у C. Итак, у D — два простых числа и одно из чисел 6 и 12, у C соответственно — 4, 6, 10, или 4, 10, 12, у B — три простых числа, у A — числа 1, 8, 9.

2 (7 баллов). *В одной из клеток шахматной доски 10×10 стоит ладья. Переходя каждым ходом в соседнюю по стороне клетку, она обошла все клетки доски, побывав в каждой ровно по одному разу. Докажите, что для каждой главной диагонали доски верно следующее утверждение: в маршруте ладьи есть два последовательных хода, первым из которых она ушла с этой диагонали, а следующим — вернулась на неё. (Главная диагональ ведёт из угла доски в противоположный угол.)* *(Александр Грибалко)*

Первое решение. Зафиксируем диагональ. Так как в маршруте чётное число клеток, крайние клетки маршрута будут разного цвета, поэтому на диагонали не более одной крайней клетки. Ход ладьи соединяет две клетки (направление не важно). Из крайних клеток маршрута выходит один ход, из всех остальных — по два. С диагонали выходит не менее $2 \cdot 10 - 1 = 19$ ходов. Все они ведут на соседние с диагональю клетки, а их только 18. Значит, есть два хода, соединяющих клетку диагонали с одной соседней клеткой. Это и есть искомая пара последовательных ходов.

Второе решение (Валерий Миронов, 11 кл.) На диагонали 10 клеток. Клетки, пройденные между ними, составляют 9 кусков маршрута. Тогда хотя бы 5 из этих 9 кусков должны располагаться с одной стороны от диагонали. У этих 5 кусков маршрута 10 начал/концов, расположенных на диагонали, соседней с главной, а на этой диагонали 9 клеток. Значит, начало и конец одного из кусков маршрута совпадают, что и требовалось.

3 (7 баллов). *На плоскости сидят кузнечик Коля и 2020 его товарищей. Коля собирается совершить прыжок через каждого из остальных кузнечиков (в произвольном порядке) так, что начальная и конечная точка каждого прыжка симметричны относительно перепрыгиваемого кузнечика. Назовём точку финишной, если Коля может в неё попасть после 2020-го прыжка. При каком наибольшем числе N найдётся начальная расстановка кузнечиков, для которой имеется ровно N различных возможных финишных точек?* (Михаил Святловский)

Ответ: C_{2020}^{1010}.

Первое решение. *Оценка.* Введём на плоскости систему координат так, чтобы Коля сидел в точке $(0,0)$. Пусть $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_{2020}$ — радиус-векторы кузнечиков в порядке их перепрыгивания Колей. Нетрудно найти радиус-вектор финишной точки: $2(-\vec{a}_1+\vec{a}_2-\vec{a}_3+\ldots-\vec{a}_{2019}+\vec{a}_{2020})$. Число различных по виду сумм равно C_{2020}^{1010} (числу способов выбрать 1010 слагаемых на нечётных местах).

Пример. Расположим кузнечиков в точках числовой прямой с координатами 0 (у Коли) и $1, 3, 3^2, \ldots, 3^{2019}$ у остальных. Докажем, что все суммы степеней троек с коэффициентами ± 1 различны. Прибавив к такой сумме постоянную сумму $1+3+3^2+\ldots+3^{2019}$, получим сумму с коэффициентами 0 и 2. Она соответствует 2020-значному троичному числу из нулей и двоек, а все такие числа различны. (На самом деле, почти любое расположение кузнечиков даёт C_{2020}^{1010} финишных точек.)

Второе решение. *Оценка.* Сначала заметим, что если кузнечик перепрыгнет через какую-то точку A, а затем — через какую-то точку B, то в итоге он сдвинется на вектор $2\overrightarrow{AB}=2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$. Это следует, например, из того, что средняя линия треугольника параллельна основанию и в два раза меньше его (случай, когда кузнечик сидит на прямой AB, можно рассмотреть отдельно).

Каждой финишной точке можно поставить в соответствие последовательность, в которой Коля перепрыгивал своих друзей, чтобы оказаться в этой точке после 2020 прыжков — то есть перестановку чисел от 1 до 2020 (считаем всех кузнечиков, кроме Коли, пронумерованными). Пусть Коля в какой-то момент оказался в точке O и собирается перепрыгнуть кузнечиков, расположенных в точках A, B, C (рассматриваем только 3 последовательных прыжка). Если Коля сделает эти прыжки в порядке ABC, то сначала он сдвинется на вектор $2\overrightarrow{OA}$, а затем за два прыжка сдвинется ещё на вектор $2\overrightarrow{BC}=2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$, то есть в итоге за три прыжка сдвинется на вектор $2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$. Если же Коля сделает эти прыжки в порядке CBA, то, аналогично, сдвинется в итоге на вектор $2(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$, то есть попадёт в ту же самую точку, что и в предыдущем случае. Таким образом, в последовательности прыжков Коли можно поменять местами любых двух кузнечиков, стоящих через один, и это не изменит финишной точки. Значит, финишная точка характеризуется не перестановкой чисел от 1 до 2020 (которых $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2020$), а только тем, какие числа в такой перестановке стоят на нечётных местах. Соответственно, различных финишных точек не может быть больше C_{2020}^{1010}.

Пример. См. предыдущее решение.

4 (7 баллов). *При каком наименьшем k среди любых трёх ненулевых действительных чисел можно выбрать такие два числа a и b, что $|a-b|\leqslant k$ или $|\frac{1}{a}-\frac{1}{b}|\leqslant k$?* (Максим Дидин)

Ответ: при $k=\frac{3}{2}$.

Докажем, что для любых трёх ненулевых чисел $a<b<c$ одна из шести разностей $b-a$, $c-b$, $c-a$, $|\frac{1}{a}-\frac{1}{b}|$, $|\frac{1}{b}-\frac{1}{c}|$, $|\frac{1}{a}-\frac{1}{c}|$ не превосходит $\frac{3}{2}$. Не умаляя общности, хотя бы два числа положительны.

Первый способ. Предположим противное. Заменой всех чисел на обратные к ним можно добиться того, чтобы наименьшее число a было не меньше -1. Тогда среднее число $b>\frac{1}{2}$, а наибольшее $c>2$. При этом $\frac{1}{b}-\frac{1}{c}>\frac{3}{2}$. Значит, $b<2/3<1$ и $a<0$. Получаем систему неравенств

$$-a>\frac{3}{2}-b, \qquad -\frac{1}{a}>\frac{3}{2}-\frac{1}{c}>3-\frac{1}{b}.$$

Перемножив, получим $1 > (\frac{3}{2} - b)(3 - \frac{1}{b})$, откуда $2b > (3 - 2b)(3b - 1)$. Раскрыв скобки и перенеся всё в левую часть, получим $6b^2 - 9b + 3 > 0$. Тогда $(b-1)(2b-1) > 0$, противоречие.

Второй способ. Разберём возможные случаи.

1) $a > 0$. Если $b \leqslant 1$, то $b - a < 1$; если $b > 1$, то $\frac{1}{b} - \frac{1}{c} < 1$.

2) $a < 0$. Можно считать, что $bc \leqslant 1$ (иначе заменим все числа на обратные). Пусть $b - a > \frac{3}{2}$ и $c - b > \frac{3}{2}$. Тогда $b(b + \frac{3}{2}) < bc \leqslant 1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{3}{2})$. Значит, $b < \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{a} < \frac{1}{\frac{3}{2} + b} + \frac{1}{\frac{3}{2} - b} = \frac{3}{\frac{9}{4} - b^2} < \frac{3}{\frac{9}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}.$$

Улучшить результат нельзя: для чисел $-1, \frac{1}{2}, 2$ все шесть разностей не меньше $3/2$.

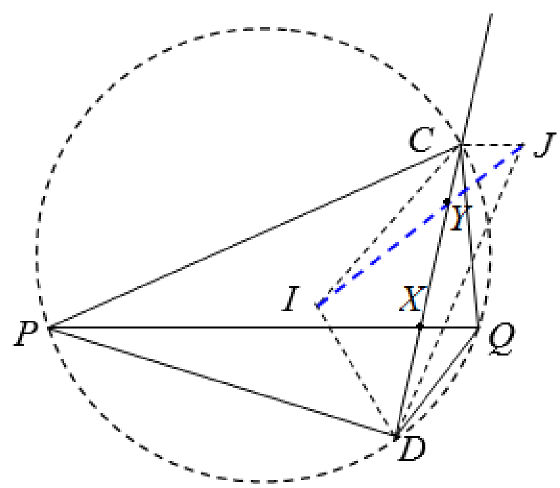
5 (9 баллов). *Внутри параллелограмма $ABCD$ взята такая точка P, что $\angle PDA = \angle PBA$. Пусть ω_1 — вневписанная окружность треугольника PAB, лежащая напротив вершины A. Пусть ω_2 — вписанная окружность треугольника PCD. Докажите, что одна из общих касательных к ω_1 и ω_2 параллельна AD.* *(Иван Фролов)*

Указание. После параллельного переноса на вектор $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AD}$ задача превращается в такую:

Дан произвольный вписанный четырехугольник $CPDQ$. Тогда одна из общих касательных к окружности, вписанной в треугольник PCD и вневписанной для треугольника CDQ напротив вершины D, параллельна PQ.

Последнее следует из одной из вариаций известного факта о том, что прямая между соответствующими инцентрами (эксцентрами) треугольников PCD, QCD параллельна биссектрисе между CD и PQ (последнее в свою очередь следует из леммы о трезубце).

Решение. Перенеся треугольник PAB на вектор $\overrightarrow{AD}$, получим треугольник QDC. Окружность ω_1 также сдвинется параллельно AD и перейдёт во вневписанную окружность треугольника с центром J, поэтому достаточно доказать, что одна из общих касательных к ω_3 и ω_2 параллельна AD.



По условию $\angle QPD = \angle PDA = \angle PBA = \angle QCD$, значит, точки C, P, D и Q лежат на одной окружности. По известным формулам углов между биссектрисами

$$\angle CID + \angle CJD = \left(\frac{1}{2}\angle CPD + 90^\circ\right) + \left(\frac{1}{2}\angle CQD\right) = 180^\circ,$$

то есть точки C, I, D и J лежат на одной окружности.

Пусть X и Y — точки пересечения CD с PQ и IJ соответственно. Имеем

$$\angle IYD = \angle ICD + \angle CDJ = \frac{1}{2}(\angle PCD + \angle CDQ),$$

как угол между хордами, отсюда, в частности, угол IYD острый, так как

$$\angle PCD + \angle CDQ < \angle PCQ + \angle PDQ = 180^\circ.$$

Тогда точка D', симметричная точке D относительно IJ, лежит по ту же сторону от CD, что и P, и при этом

$$\angle CYD' = 180^\circ - \angle D'YD = 180^\circ - 2\angle IYD = 180^\circ - (\angle PCD + \angle CDQ) = \angle PDC + \angle DCQ = \angle PXC$$

(последнее верно, так как $PCQD$ вписанный). Итак, соответственные углы PXC и CYD' при пересечении прямой CD секущими PQ и $D'Y$ равны, значит $D'Y||PQ||AD$, и прямая $D'Y$ симметрична общей касательной CD относительно линии центров IJ, значит $D'Y$ тоже общая касательная, и она параллельна AD.

6 (10 баллов). *На столе в ряд лежат 20 плюшек с сахаром и 20 с корицей в произвольном порядке. Малыш и Карлсон берут их по очереди, начинает Малыш. За ход можно взять одну плюшку с любого края. Малыш хочет, чтобы ему в итоге досталось по десять плюшек каждого вида, а Карлсон пытается ему помешать. При любом ли начальном расположении плюшек Малыш может достичь своей цели, как бы ни действовал Карлсон?* *(Александр Грибалко)*

Ответ: при любом.

Пронумеруем плюшки в ряду числами от 1 до 40. Заметим, что у Малыша всегда есть возможность взять плюшку с номером любой чётности, а после каждого его хода Карлсон вынужден брать плюшку с номером другой чётности.

Пусть среди плюшек с нечётными номерами не меньше десяти с сахаром (если с корицей, то рассуждения аналогичны). Тогда Малыш начинает с того, что берёт плюшки с нечётными номерами и после каждого хода Карлсона вычисляет такую величину: количество полученных плюшек с сахаром + количество оставшихся на столе плюшек с сахаром с чётными номерами. В начальный момент эта величина не больше 10, а если Малыш будет брать плюшки только с нечётными номерами, то в конце она будет не меньше 10. При этом после каждой пары ходов Малыша и Карлсона эта величина изменяется не более чем на 1. Следовательно, в какой-то момент (возможно, начальный) она будет равна 10. После этого Малыш может брать только плюшки с чётными номерами и в итоге получит ровно 10 плюшек с сахаром, а значит, и 10 плюшек с корицей, что и требуется.

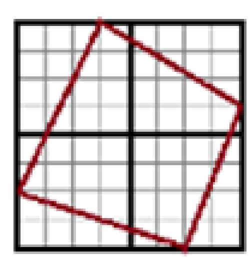
Замечание. Верно более общее утверждение: если в ряд лежит чётное число плюшек, и из них на нечётных местах ровно L с сахаром, а на чётных — ровно R с сахаром, то для всякого k между (нестрого) числами R и L Малыш может действовать так, чтобы взять ровно k плюшек с сахаром.

Для решения исходной задачи достаточно доказать это утверждение, ибо в нашем случае $R+L=20$ и одно из чисел не меньше 10, а другое не больше 10.

Доказываем индукцией по количеству плюшек. Если их две, то утверждение очевидно. Шаг индукции: покрасим плюшки в шахматном порядке, чтобы нечётные стали белыми; если $k=L$, то Малышу достаточно каждым ходом есть белую плюшку, если $k=R$ — то чёрную. Если же k заключено строго между L и R, то Малыш может сделать первый ход произвольным образом, а далее добиться своего по предположению индукции. В самом деле, не умаляя общности, $L<k<R$, тогда белых плюшек с сахаром останется либо L, либо $L-1$, чёрных — либо R, либо $R-1$, а Малышу далее надо взять либо k, либо $k-1$ плюшку с сахаром, причём $L-1<L\leqslant k-1<k\leqslant R-1<R$.

7. *Клетчатый квадрат 2×2 накрыт двумя треугольниками. Обязательно ли*
а) (6 баллов) хоть одна из четырёх его клеток целиком накрыта одним из этих треугольников;
б) (6 баллов) в один из этих треугольников можно поместить квадрат со стороной 1?
(Александр Шаповалов)

а) Ответ: не обязательно. Впишем в квадрат четырёхугольник без параллельных сторон так, чтобы одна его сторона разбила на части обе левые клетки, вторая — обе верхние, третья — обе правые, четвёртая — обе нижние. Продлим пары противоположных сторон до пересечения. Теперь квадрат покрыт двумя углами, при этом нет клетки, целиком покрытой одним углом. Отрезав лишнее, превратим углы в треугольники. На рисунке — пример искомого четырёхугольника на клетчатой бумаге со вспомогательными клетками размера $0,25\times 0,25$.



б) Ответ: обязательно. Отметим 9 вершин клеток квадрата 2×2 как на рисунке 1. Треугольники их все накрывают. Возможны три случая распределения вершин квадрата A, B, C, D между треугольниками.

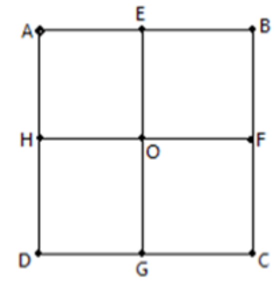


Рис. 1

1) В один накрывающий треугольник T попали три вершины, скажем, A, B, C. Тогда фигура T накрывает весь треугольник AB и, тем более, клетку $BFOE$.

2) В накрывающие треугольники попали пары вершин на противоположных сторонах, скажем, в один A, B, в другой C, D. Тогда первый накрывает и точку E, а второй — точку G. Из трёх точек H, O, F либо две, либо все три попадут в один треугольник. В силу выпуклости среди них есть пара точек на расстоянии 1. Пусть, например, H и O попали вместе с A, E, B. Тогда в этом треугольнике лежит клетка $AEOH$.

3) В накрывающие треугольники T_1 и T_2 попали пары противоположных вершин квадрата: скажем, в T_1 — A и C, в T_2 — B и D (рис. 2). Тогда лежащая на пересечении диагоналей точка O попала и в T_1, и в T_2. Будем искать такое распределение точек E, F, G, H по треугольникам, чтобы ни один из треугольников не накрывал целую клетку. Можно считать, что точка E попала в T_1. Тогда H — в T_2 (иначе T_1 накроет клетку $AEOH$), G — в T_1 (иначе T_2 накроет $HOGD$), F — в T_2 (иначе T_1 накроет $OFCG$).

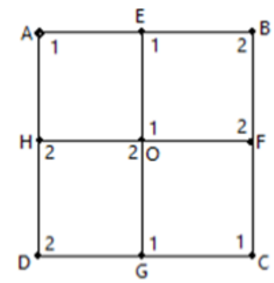


Рис. 2

Рассмотрим теперь середину M отрезка DG (рис. 3). Если она тоже принадлежит T_1, то, сдвинув клетку $DHOG$ на $1/2$ вправо, мы расположим её целиком в T_1 (ведь середина AG, лежащая над M, лежит в T_1, и середина EC лежит в T_1). Значит, можно считать, что M лежит в T_2.

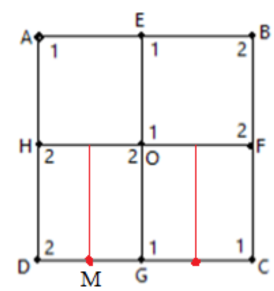


Рис. 3

Аналогично, можно считать, что середина N отрезка EB лежит в T_2. Но тогда в T_2 лежит параллелограмм $MHNF$ (рис. 4).

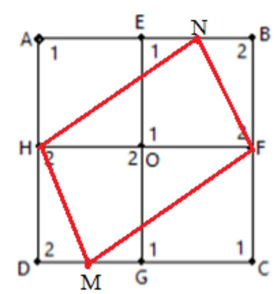


Рис. 4

Осталось доказать, что внутрь $MHNF$ помещается квадрат 1×1. Заметим, что угол NHM тупой (например, потому, что угол MHB прямой). Далее, площадь параллелограмма $MHNF$ равна $4 - 2 \cdot 1,5 - 2 \cdot 0,5 = 2$. Далее, $HN = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$. Тогда высота HX параллелограмма $MHNF$, опущенная из H на MF, равна $2 : \frac{\sqrt{13}}{2} > 1$. При этом

$$MX = \sqrt{HM^2 - HX^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} - HX^2} < \sqrt{1 + \frac{1}{4} - 1} = \frac{1}{2}.$$

Тогда $HN - MX > \frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{1}{2} > 1$, откуда в параллелограмм $MHNF$ помещается квадрат с вершиной H и стороной длины 1, идущей вдоль HN.

СОРОК ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 6 марта 2022 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
3	1. Два человека шли по прямой дорожке навстречу друг другу с постоянными скоростями, но один — медленно, другой — быстро. Одновременно каждый отпустил вперёд от себя собаку (собаки бежали с одной и той же постоянной скоростью). Каждая собака добежала до другого хозяина и возвратилась к своему. Чья собака вернулась раньше — быстрого хозяина или медленного? *Александр Рубин*
4	2. Петя взял произвольное натуральное число, умножил его на 5, результат снова умножил на 5, потом ещё на 5, и так далее. Верно ли, что с какого-то момента все получающиеся у Пети числа будут содержать 5 в своей десятичной записи? *Сергей Дориченко*
5	3. На Поле Чудес выросло 11 золотых монет, но стало известно, что ровно четыре из них фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые тоже, но они легче настоящих. Лиса Алиса и Буратино собрали монеты и стали их делить. Алиса собирается отдать Буратино четыре монеты, но он хочет сначала проверить, все ли они настоящие. Сможет ли он сделать это за два взвешивания на чашечных весах без гирь? *Александр Грибалко*
5	4. На диагонали AC квадрата $ABCD$ взята точка P. Пусть H — точка пересечения высот треугольника APD, M — середина AD и N — середина CD. Докажите, что прямые PN и MH взаимно перпендикулярны. *Иван Кухарчук*
6	5. Прямоугольник 1×3 будем называть *триминошкой*. Петя и Вася независимо друг от друга разбивают доску 20×21 на триминошки. Затем они сравнивают полученные разбиения, и Петя платит Васе столько рублей, сколько триминошек в этих двух разбиениях совпали (оказались на одинаковых позициях). Какую наибольшую сумму выигрыша может гарантировать себе Вася независимо от действий Пети? *Алексей Глебов*

СОРОК ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 6 марта 2022 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

4 1. Натуральное число умножили на 5, результат снова умножили на 5 и так далее, всего сделали k умножений. Оказалось, что в десятичной записи исходного числа и полученных k чисел нет цифры 7. Докажите, что существует натуральное число, которое можно k раз умножить на 2, и снова ни в одном числе не будет цифры 7 в его десятичной записи.

Александр Грибалко

4 2. На Поле Чудес выросло 8 золотых монет, но стало известно, что ровно три из них фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые тоже, но они легче настоящих. Лиса Алиса и Буратино собрали монеты и стали их делить. Алиса собирается отдать Буратино три монеты, но он хочет сначала проверить, все ли они настоящие. Сможет ли он сделать это за два взвешивания на чашечных весах без гирь?

Александр Грибалко

5 3. Пусть n — натуральное число. Назовём последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *интересной*, если для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ верно одно из равенств $a_i = i$ или $a_i = i + 1$. Назовем интересную последовательность *чётной*, если сумма её членов чётна, и *нечётной* — иначе. Для каждой нечётной интересной последовательности нашли произведение её чисел и записали его на первый листок. Для каждой чётной — сделали то же самое и записали на второй листок. На каком листке сумма чисел больше и на сколько? (Дайте ответ в зависимости от n.)

Алексей Глебов

5 4. Прямоугольник 1×3 будем называть *триминошкой*. Петя и Вася независимо друг от друга разбивают доску 20×21 на триминошки. Затем они сравнивают полученные разбиения, и Петя платит Васе столько рублей, сколько триминошек в этих двух разбиениях совпали (оказались на одинаковых позициях). Какую наибольшую сумму выигрыша может гарантировать себе Вася независимо от действий Пети?

Алексей Глебов

6 5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω с центром в точке O. Описанная окружность треугольника AOC пересекает вторично прямые AB, BC, CD и DA в точках M, N, K и L соответственно. Докажите, что прямые MN, KL и касательные, проведённые к ω в точках A и C, касаются одной окружности.

Азамат Марданов

СОРОК ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, март 2022 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4 1. Найдите наибольшее натуральное число n со свойством: для каждого простого числа p, большего 2 и меньшего n, разность $n - p$ также является простым числом.

Игорь Акулич

7 2. Докажите, что из любого выпуклого четырёхугольника можно вырезать три его копии вдвое меньшего размера. (У копии соответственные углы равны исходным, а соответственные стороны — в два раза меньше исходных.)

Александр Юран

7 3. Для каждого из девяти натуральных чисел n, $2n$, $3n$, …, $9n$ выписали на доску первую слева цифру в его десятичной записи. При этом n выбрали так, чтобы среди девяти выписанных цифр количество различных цифр было как можно меньше. Чему равно это количество?

Алексей Толпыго

4. В белом клетчатом квадрате 100×100 закрашено чёрным несколько клеток (не обязательно соседних). В каждой горизонтали или вертикали, где есть чёрные клетки, их количество нечётно, так что одна из клеток — *средняя* по счёту. Все чёрные клетки, средние по горизонтали, стоят в разных вертикалях. Все чёрные клетки, средние по вертикали, стоят в разных горизонталях.

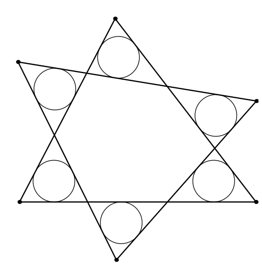
5 а) Докажите, что найдётся клетка, средняя и по горизонтали и по вертикали.

5 б) Обязательно ли каждая клетка, средняя по горизонтали — средняя и по вертикали?

Борис Френкин

10 5. Два треугольника пересекаются по шестиугольнику, который отсекает от них шесть маленьких треугольников. Радиусы вписанных окружностей этих шести треугольников равны. Докажите, что радиусы вписанных окружностей двух исходных треугольников также равны.

Андрей Кушнир



10 6. Для турнира изготовили 7 золотых, 7 серебряных и 7 бронзовых медалей. Все медали из одного металла должны весить одинаково, а из разных должны иметь различные массы. Но одна из всех медалей оказалась нестандартной — имела неправильную массу. При этом нестандартная золотая медаль может весить только меньше стандартной золотой, бронзовая — только больше стандартной бронзовой, а серебряная может отличаться по весу от стандартной серебряной в любую сторону. Можно ли за три взвешивания на чашечных весах без гирь найти нестандартную медаль?

Александр Грибалко

12 7. На плоскости нарисован выпуклый многоугольник M, и дано простое число p. Оказалось, что существует ровно p разбиений многоугольника M на равносторонние треугольники со стороной 1 и квадраты со стороной 1. Докажите, что длина одной из сторон многоугольника M равна $p - 1$.

Николай Белухов

СОРОК ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, март 2022 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

5 1. Для каждого из девяти натуральных чисел n, $2n$, $3n$, $\ldots$, $9n$ выписали на доску первую слева цифру в его десятичной записи. При этом n выбрали так, чтобы среди девяти выписанных цифр количество различных цифр было как можно меньше. Чему равно это количество?

Алексей Толпыго

2. В прямоугольной системе координат (с одинаковым масштабом по осям x и y) нарисовали график функции $y = f(x)$. Затем ось ординат и все отметки на оси абсцисс стёрли. Предложите способ, как с помощью карандаша, циркуля и линейки восстановить ось ординат, если

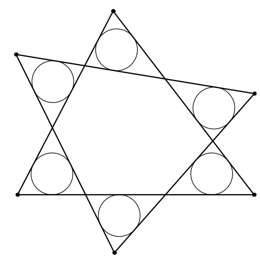
4 а) $f(x) = 3^x$;

4 б) $f(x) = \log_a x$, где $a > 1$ — неизвестное число.

Михаил Евдокимов

8 3. Два треугольника пересекаются по шестиугольнику, который отсекает от них шесть маленьких треугольников. Радиусы вписанных окружностей этих шести треугольников равны. Докажите, что радиусы вписанных окружностей двух исходных треугольников также равны.

Андрей Кушнир



8 4. По доске $n \times n$ прошла ладья, побывав в каждой клетке один раз, причём каждый её ход был на соседнюю по стороне клетку. Клетки занумерованы целыми числами от 1 до n^2 в порядке прохождения ладьи. Пусть M — наибольшая разность между номерами соседних по стороне клеток. Каково наименьшее возможное значение M?

Борис Френкин

8 5. Дан многочлен степени 2022 с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1. Какое наибольшее число корней он может иметь на интервале $(0, 1)$?

Алексей Канель-Белов

8 6. Султан собрал 300 мудрецов и предложил им испытание. Он сообщил им список из 25 цветов и сказал, что на испытании каждому мудрецу наденут на голову колпак одного из этих цветов, причём если для каждого цвета написать количество надетых колпаков этого цвета, все числа будут различны. Каждый мудрец увидит, какой колпак на ком надет, но свой колпак не увидит. Затем одновременно (по сигналу) каждый должен будет назвать предполагаемый цвет своего колпака. Могут ли мудрецы заранее договориться действовать так, чтобы гарантированно хотя бы 150 из них назвали цвет верно?

Александр Грибалко

7. Звездолёт находится в полупространстве на расстоянии a от его границы. Экипаж знает об этом, но не представляет, в каком направлении двигаться, чтобы достигнуть граничной плоскости. Звездолёт может лететь в пространстве по любой траектории, измеряя длину пройденного пути, и имеет датчик, подающий сигнал, когда граница достигнута. Может ли звездолёт гарантированно достигнуть границы, пролетев путь длиной

6 а) не более $14a$;

6 б) не более $13a$?

Михаил Евдокимов

43-й Международный математический Турнир городов
Решения задач весеннего тура

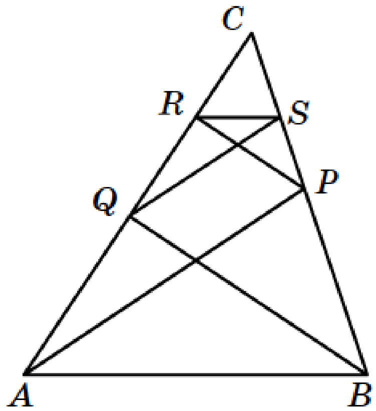
Базовый вариант

8 – 9 классы

1. [3] Два человека шли по прямой дорожке навстречу друг другу с постоянными скоростями, но один – медленно, другой – быстро. Одновременно каждый отпустил вперёд от себя собаку (собаки бежали с одной и той же постоянной скоростью). Каждая собака добежала до другого хозяина и возвратилась к своему. Чья собака вернулась раньше – быстрого хозяина или медленного?

Александр Рубин

Ответ: собаки вернулись одновременно.
Решение 1. Пусть L – расстояние между людьми в момент, когда они отпустили собак, v и V – скорости людей ($V > v$), u – скорость собак. Собака медленного хозяина добежит до быстрого за время $\frac{L}{u+V}$ и за это время убежит от своего хозяина на расстояние $\frac{L(u-v)}{u+V}$, а вернется к нему за время $\frac{L(u-v)}{(u+V)(u+v)}$. Общее время её «путешествия» равно $\frac{L}{u+V}+\frac{L(u-v)}{(u+V)(u+v)}=\frac{2Lu}{(u+V)(u+v)}$. Тот же результат аналогично получится для другой собаки.



Решение 2. На рисунке на горизонтальной оси откладывается расстояние вдоль дорожки, а на вертикальной – время. Точки A и B соответствуют положениям хозяев (и их собак) в начальный момент, люди движутся в пространстве-времени по лучам AC и BC, а собаки – по ломаным APR и BQS. Поскольку скорости собак одинаковы, $AP \parallel QS$ и $BQ \parallel PR$. По теореме Фалеса $CQ : CA = CS : CP$ и $CR : CQ = CP : CB$, откуда $CR : CA = CS : CB$. Следовательно, $RS \parallel AB$, что и означает одновременность событий R и S.

2. [4] Петя взял произвольное натуральное число, умножил его на 5, результат снова умножил на 5, потом ещё на 5, и так далее. Верно ли, что с какого-то момента все получающиеся у Пети числа будут содержать 5 в своей десятичной записи?

Сергей Дориченко

Ответ: верно. Запишем исходное число в виде $2^k m$, где m нечётно («вынесем все двойки»). После k+1 умножений на 5 мы получим число, оканчивающееся на k нулей, перед которыми стоит пятёрка, и она сохранится при дальнейших умножениях.

3. [5] На Поле Чудес выросло 11 золотых монет, но стало известно, что ровно четыре из них фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые тоже, но они легче настоящих. Лиса Алиса и Буратино собрали монеты и стали их делить. Алиса собирается отдать Буратино четыре монеты, но он хочет сначала проверить, все ли они настоящие. Сможет ли он сделать это за два взвешивания на чашечных весах без гирь?

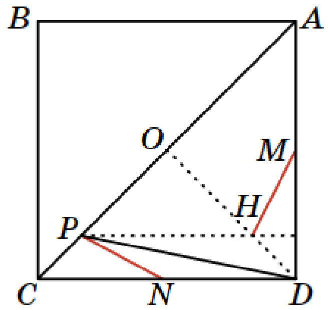
Александр Грибалко

Ответ: сможет. Пусть Буратино сначала положит на чаши по две свои монеты. Если одна из чаш перевесит, то среди его монет есть фальшивые.

В случае равновесия у Буратино могут быть 0, 2 или 4 фальшивые монеты. Теперь пусть на одну чашу он положит свои монеты, а на другую – 4 монеты Лисы. Если все монеты Буратино настоящие, его чаша перевесит (ведь настоящих монет только 7), в остальных случаях – нет, так как при этом у Лисы не более двух фальшивых монет.

4. [5] На диагонали AC квадрата $ABCD$ взята точка P. Пусть H – точка пересечения высот треугольника APD, M – середина AD и N – середина CD. Докажите, что прямые PN и MH взаимно перпендикулярны.

Иван Кухарчук



При одном из поворотов на 90° вокруг центра O квадрата точка A перейдёт в точку D, точка D – в точку C, а точка M – в точку N. Так как OPH – равнобедренный прямоугольный треугольник, H перейдёт в P. Значит, отрезок MH перейдёт в NP, поэтому они перпендикулярны.

Замечание. Если треугольник APD тупоугольный, точка H лежит вне него, что никак не сказывается на решении.

5. [6] Прямоугольник 1×3 будем называть *триминошкой*. Петя и Вася независимо друг от друга разбивают доску 20×21 на триминошки. Затем они сравнивают полученные разбиения, и Петя платит Васе столько рублей, сколько триминошек в этих двух разбиениях совпали (оказались на одинаковых позициях). Какую наибольшую сумму выигрыша может гарантировать себе Вася независимо от действий Пети?

Алексей Глебов

Ответ: 14 рублей. Пусть вертикальная сторона доски равна 20, а горизонтальная – 21.

Пример. Покажем, как Васе гарантированно получить не менее 14 рублей. Он разбивает доску на горизонтальные триминошки. Пусть количество Петиных горизонтальных триминошек, центр которых лежит в i-м столбце, равно a_i. В i-й столбец залезают доминошки, с центрами в столбцах $i-1$, i и $i+1$. Поскольку в столбце 20 клеток, а вертикальная триминошка покрывает три клетки, сумма $a_{i-1} + a_i + a_{i+1}$, даёт остаток 2 при делении на 3. Сумма $a_i + a_{i+1} + a_{i+2}$ тоже даёт остаток 2 от деления на 3, откуда остатки у a_{i-1} и a_{i+2} одинаковы. Число центров горизонтальных триминошек, попавших в столбец 2, даёт остаток 2 при делении на 3, откуда в каждом из столбцов 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 лежат центры хотя бы двух горизонтальных триминошек Пети. Они совпадут с Васиными, что даст ему не менее 14 рублей.

Оценка. Можно считать, что Петя знает Васино разбиение. Верхние две строки Петя разбивает на горизонтальные триминошки, они дадут Васе не более 14 совпадений. Оставшуюся доску Петя разделит на квадраты 3×3. Если в какой-то квадрат полностью входит Васина горизонтальная триминошка, то Петя разобьёт его на вертикальные триминошки, иначе – на горизонтальные, и в этом квадрате не будет совпадений.

10 – 11 классы

1. [4] Натуральное число умножили на 5, результат снова умножили на 5 и так далее, всего сделали k умножений. Оказалось, что в десятичной записи исходного числа и полученных k чисел нет цифры 7. Докажите, что существует натуральное число, которое можно k раз умножить на 2, и снова ни в одном числе не будет цифры 7 в его десятичной записи.

Александр Грибалко

Пусть исходное число равно n. В качестве искомого числа годится $5^k n$. Действительно, последовательно умножая его на двойки, получим числа $5^{k-1}\cdot 10n$, $5^{k-2}\cdot 10^2 n$, ..., $10^k n$, которые отличаются от чисел $5^{k-1}n$, $5^{k-2}n$, ..., n только наличием нескольких нулей в конце и поэтому не содержат семёрок.

2. [4] На Поле Чудес выросло 8 золотых монет, но стало известно, что ровно три из них фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые тоже, но они легче настоящих. Лиса Алиса и Буратино собрали монеты и стали их делить. Алиса собирается отдать Буратино три монеты, но он хочет сначала проверить, все ли они настоящие. Сможет ли он сделать это за два взвешивания на чашечных весах без гирь?

Александр Грибалко

Ответ: сможет.

Решение 1. Пусть сначала Буратино сравнит три свои монеты с тремя монетами Алисы. Если его чаша окажется легче, то у него есть фальшивые монеты. В случае равновесия – тоже есть, поскольку настоящих монет всего пять.

Пусть чаша Буратино тяжелее (то есть на чаше Алисы фальшивых монет больше). Тогда он заменит две монеты с чаши Алисы на ещё неиспользованные. Если и теперь чаша Буратино перевесит, то все монеты у него настоящие: иначе оба раза на чаше Алисы было по две фальшивые монеты, что невозможно. В противном случае, как показано выше, какие-то из монет Буратино фальшивые.

Решение 2. Достаточно использовать только три монеты (a, b, c) Буратино и одну монету (d) Лисы. Сначала Буратино сравнит c с d. Если $c < d$, то монета c фальшивая.

В противном случае он сравнит $a + b$ с $c + d$. Если при первом взвешивании $c > d$, то монета c настоящая, а d фальшивая. Тогда Буратино устраивает только результат $a + b > c + d$. Если же $c = d$, то Буратино устраивает только результат $a + b = c + d$ (поскольку четырёх фальшивых монет нет).

3. [5] Пусть n – натуральное число. Назовём последовательность $a_1, a_2, ..., a_n$ *интересной*, если для каждого $i = 1, 2, ..., n$ верно одно из равенств $a_i = i$ или $a_i = i + 1$. Назовём интересную последовательность *чётной*, если сумма её членов чётна, и *нечётной* – иначе. Для каждой нечётной интересной последовательности нашли произведение её чисел и записали его на первый листок. Для каждой чётной – сделали то же самое и записали на второй листок. На каком листке сумма чисел больше и на сколько? (Дайте ответ в зависимости от n.)

Алексей Глебов

Ответ: при $n \equiv 0, 1 \pmod 4$ сумма на втором листке больше на 1, при остальных n – наоборот. Иными словами, больше на 1 та сумма, где присутствует слагаемое $2\cdot 3\cdot ...\cdot n\cdot(n + 1)$.

Решение 1. Обозначив сумму, содержащую слагаемое $2\cdot 3\cdot ...\cdot n\cdot(n + 1)$, через A_n, а другую – через B_n, докажем равенство $A_n - B_n = 1$ по индукции. *База*. $A_1 - B_1 = 2 - 1 = 1$.

Шаг индукции. Представим сумму A_n в виде $A' + A''$, где A' содержит все слагаемые вида $a_1a_2...a_{n-1}(n + 1)$, а A'' – все слагаемые вида $a_1a_2...a_{n-1}n$. Так как сумма A' содержит слагаемое $2\cdot 3\cdot ...\cdot n(n + 1)$, то для каждого её слагаемого $a_1a_2...a_{n-1}(n + 1)$ последовательность $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ имеет ту же чётность, что и последовательность 2, 3, ..., n. Следовательно, $A' = (n + 1)A_{n-1}$. Соответственно, в сумме A'' для каждого её слагаемого $a_1a_2...a_{n-1}n$ чётность последовательности $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ противоположна чётности последовательности 2, 3, ..., n. Тогда $A'' = nB_{n-1}$, откуда $A_n = A' + A'' = (n + 1)A_{n-1} + nB_{n-1}$. Аналогично, $B_n = nA_{n-1} + (n + 1)B_{n-1}$.

В результате получаем: $A_n - B_n = (n + 1)A_{n-1} + nB_{n-1} - nA_{n-1} - (n + 1)B_{n-1} = A_{n-1} - B_{n-1} = 1$.

Решение 2. Рассмотрим равенство $1 = (2 - 1)(3 - 2)...(n - (n - 1))((n + 1) - n)$.

Раскрыв все скобки в правой части, получим сумму из 2^n слагаемых со знаками плюс и минус, каждое из которых является произведением n чисел: по одному числу из каждой скобки. Так как в i-й скобке выбирается число $i + 1$ или $-i$, то каждое слагаемое по модулю равно произведению чисел какой-то интересной последовательности, при этом слагаемое входит в сумму со знаком плюс, если множитель $-i$ выбирается в чётном числе скобок, и со знаком минус, если в нечётном. Значит, произведения тех интересных последовательностей, которые имеют ту же чётность, что и последовательность 2, 3, ..., n, $n+1$, входят в сумму со знаком плюс, а произведения интересных последовательностей противоположной чётности входят в сумму со знаком минус. Отсюда следует искомое равенство.

4. [5] См. задачу 5 младших классов

5. [6] Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω с центром в точке O. Описанная окружность треугольника AOC пересекает вторично прямые AB, BC, CD и DA в точках M, N, K и L соответственно. Докажите, что прямые MN, KL и касательные, проведённые к ω в точках A и C, касаются одной окружности.

Азамат Марданов

Решение. Пусть Ω – описанная окружность треугольника AOC. Напомним, что ориентированным углом $\angle(l, m)$ между прямыми l и m называется угол, на который надо повернуть прямую l, чтобы она стала параллельна m (этот угол определён по модулю 180°).

Пусть касательные к ω в точках A и C пересекаются в точке P, которая, очевидно, лежит на окружности Ω. Так как PA – касательная, то $\angle(PA, AB) = \angle(AC, CB)$, то есть $\angle(PA, AM) = \angle(AC, CN)$. Значит, ориентированные дуги PM и AN равны, откуда равны хорды PA и MN. Аналогично, $PA = KL$. Равенство $PA = PC$ очевидно. Следовательно, хорды MN, KL, PA и PC равноудалены от центра окружности Ω, что и требовалось.

Замечание. Приведённое решение не требует разбора различных вариантов расположения точек на окружностях. При более традиционном решении даже при оговорке, что достаточно рассматривать случай, когда точка B лежит на бóльшей дуге AC (рис. 1), что позволяет избежать рассмотрения различных вариантов расположения точек D, K и L (рис. 2), придётся рассматривать как минимум три варианта расположения точки B:

1) точки M и N лежат на дуге APC (рис. 3);

2) точки M и N лежат на дуге AOC (рис. 4);

3) одна из точек M, N лежит на дуге AOC, а другая – нет (рис. 5).

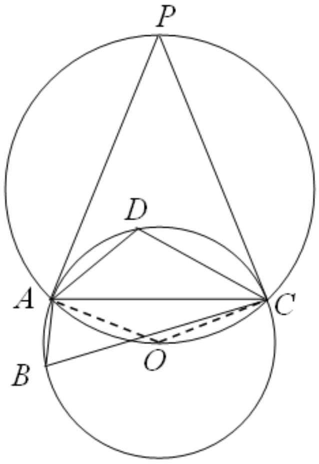


Рис. 1

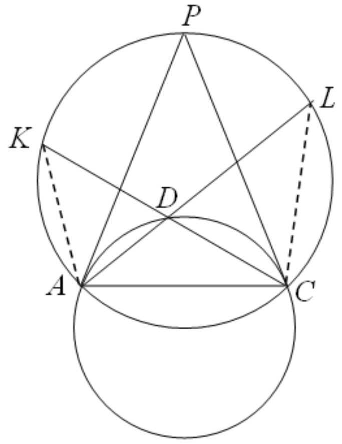


Рис. 2

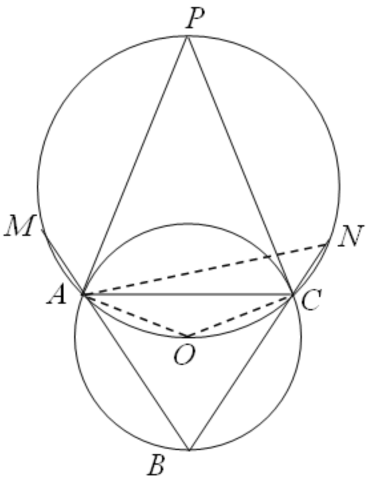


Рис. 3

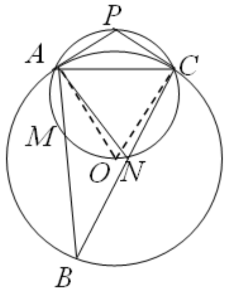


Рис. 4

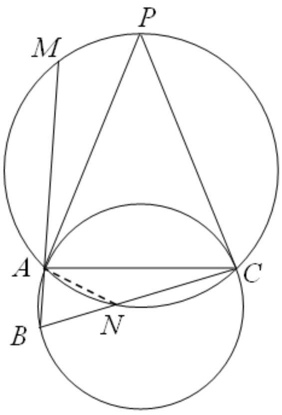


Рис. 5

Сложный вариант

8 – 9 классы

1. [4] Найдите наибольшее натуральное число n со свойством: для каждого простого числа p, большего 2 и меньшего n, разность $n - p$ также является простым числом.

Игорь Акулич

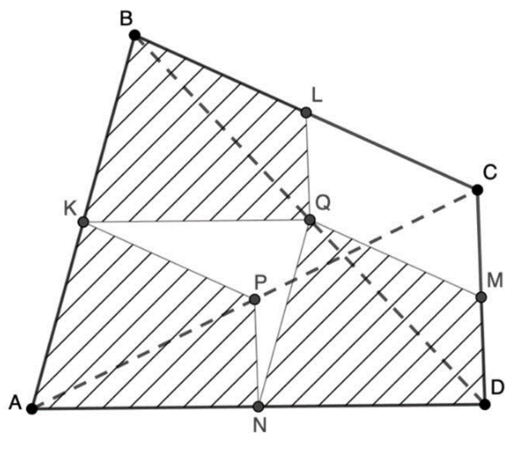
Ответ: $n = 10$.

Решение. При $n > 10$ числа $n - 3$, $n - 5$, $n - 7$ больше 3, а одно из них кратно 3, поэтому n не больше 10. Число $n = 10$ подходит, так как числа $10 - 3 = 7$, $10 - 5 = 5$ и $10 - 7 = 3$ простые.

2. [7] Докажите, что из любого выпуклого четырёхугольника можно вырезать три его копии вдвое меньшего размера.

Александр Юран

Решение. Сумма углов четырёхугольника $ABCD$ равна 360°. Поэтому среди сумм $\angle A+\angle B$ и $\angle C+\angle D$ одна не больше 180°, и среди сумм $\angle B+\angle C$ и $\angle D+\angle A$ – тоже. Пусть это, например, суммы $\angle A+\angle B$ и $\angle D+\angle A$. Разместим тогда в углах A, B и D уменьшенные в 2 раза копии четырёхугольника, как показано на рисунке. Копия с углом A не пересечётся с остальными копиями из-за неравенства на суммы углов, а копии с углами B и D будут иметь лишь одну общую точку – середину диагонали BD (их «разделяют» два параллелограмма).



3. [7] Для каждого из девяти натуральных чисел n, $2n$, $3n$, ..., $9n$ выписали на доску первую слева цифру в его десятичной записи. При этом n выбрали так, чтобы среди девяти выписанных цифр количество различных цифр было как можно меньше. Чему равно это количество?

Алексей Толпыго

Ответ: 4.

Решение.

Пример. При $n = 34$, получаем первые цифры 3, 6, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3.

Оценка. Поделим n на такую степень десятки, чтобы для полученного числа m (не обязательно целого) выполнялись неравенства $1 \le m < 10$, и решим задачу для числа m (первые цифры не изменятся).

Среди чисел km есть несколько чисел, меньших 10, и несколько тех, что не меньше 10. Назовем «местом перескока» то наименьшее k, для которого $km \ge 10$. Из неравенств $1 \le m < 10$ следует, что все первые цифры до перескока – разные, тогда как первые цифры после перескока могут совпадать, но все они идут подряд: 1, 2, 3 и т.д. Поэтому:

Если $1 \le m < 2{,}5$, имеется по меньшей мере 4 числа до перескока, и все они имеют разные первые цифры.

Если $2{,}5 \le m < 10/3$, имеется, как минимум, три разные цифры до перескока (причем они не меньше 2), а также цифра 1 (после перескока).

Если $10/3 \le m < 4$, имеется не менее двух цифр до перескока (причем они больше 2), а также цифры 1 и 2 после перескока.

Наконец, если $m \ge 4$, имеются, во всяком случае цифры 1, 2 3 после перескока и ещё одна цифра (не меньше 4) до перескока.

4. В белом клетчатом квадрате 100×100 закрашено чёрным несколько клеток (не обязательно соседних). В каждой горизонтали или вертикали, где есть чёрные клетки, их количество нечётно, так что одна из клеток – *средняя* по счёту. Все чёрные клетки, средние по горизонтали, стоят в разных вертикалях. Все чёрные клетки, средние по вертикали, стоят в разных горизонталях.

а) [5] Докажите, что найдётся клетка, средняя и по горизонтали, и по вертикали.

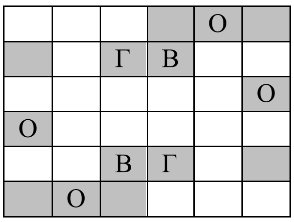
б) [5] Обязательно ли каждая клетка, средняя по горизонтали – средняя и по вертикали?

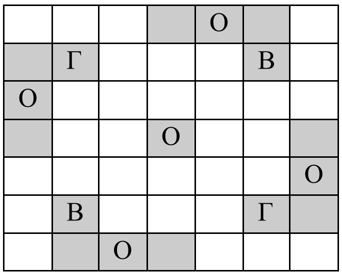
Борис Френкин

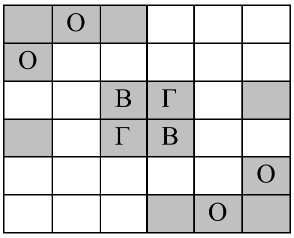
а) Запишем в каждую клетку, среднюю по вертикали, букву В, а в каждую клетку, среднюю по горизонтали, – букву Г. Выбросим все горизонтали и все вертикали без чёрных клеток. Теперь в каждой вертикали есть клетка с В. Все эти клетки стоят в разных горизонталях, поэтому горизонталей не меньше, чем вертикалей. Аналогично вертикалей не меньше, чем горизонталей, то есть их поровну. Значит, в каждой вертикали есть клетка с Г. Рассмотрим клетку с Г в самой левой вертикали. Очевидно, в горизонтали, где она стоит, ровно одна чёрная клетка. Но в этой горизонтали есть также клетка с В, следовательно, она совпадает с этой единственной чёрной клеткой.

б) Ответ: не обязательно.

Решение. На рисунке приведены примеры для квадратов 6×6 и 7×7 (обозначения: В – клетка, средняя по вертикали, Г – по горизонтали, О – и по вертикали, и по горизонтали). Добавив нужное количество белых горизонталей и вертикалей, получим квадрат 100×100.

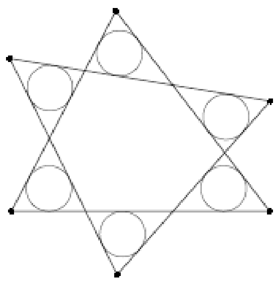




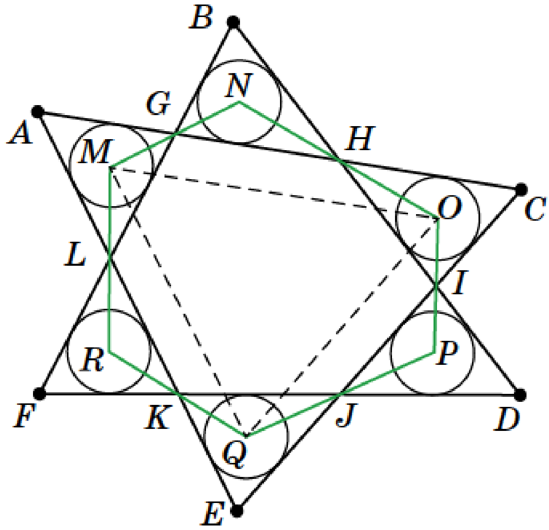


5. [10] Два треугольника пересекаются по шестиугольнику, который отсекает от них шесть маленьких треугольников. Радиусы вписанных окружностей этих шести треугольников равны. Докажите, что радиусы вписанных окружностей двух исходных треугольников также равны.

Андрей Кушнир



Решение. **5**. Обозначим точки, как на рисунке. Пусть r – радиус вписанной окружности маленького треугольника, $2p$ – периметр шестиугольника $GHIJKL$, S – площадь шестиугольника $MNOPQR$. Заметим, что радиус вписанной окружности треугольника MOQ на r меньше радиуса вписанной окружности треугольника ACE. То же верно для треугольников NPR и BDF. Поэтому достаточно доказать равенство радиусов вписанных окружностей треугольников MOQ и NPR. Для этого достаточно доказать равенство их периметров и площадей.

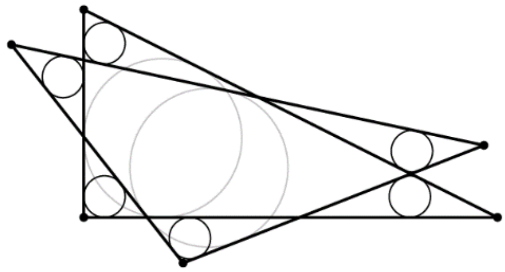


Заметим, что $GH + IJ + KL = HI + JK + LG = p$ (поскольку касательные из каждой вершины шестиугольника $GHIJKL$ к двум «соседним» с этой вершиной маленьким окружностям равны). Так как GH – средняя линия треугольника MNO и т.д., периметр треугольника MOQ равен $2p$. Кроме того, $S_{MNO} = ½\ MO \cdot 2r = MO \cdot r$, и т.д., значит, $S_{MOQ} = S - 2pr$. То же верно для треугольника NPR.

Вариация. Обозначим вершины шестиугольной звезды A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 по кругу. Пусть вписанная в маленький треугольник с вершиной A_i окружность имеет центр B_i и радиус 1, вписанная в треугольник $A_0A_2A_4$ ($A_1A_3A_5$) – O_0 и R_0 (O_1 и R_1). Прямые $A_{i-1}A_{i+1}$ и $B_{i-1}B_{i+1}$ (индексы зациклены) параллельны и удалены друг от друга на 1. Поэтому вписанная в $B_0B_2B_4$ окружность имеет центр O_0 и радиус $R_0 - 1$ (ясно, что $R_0 > 1$). Аналогично для треугольника $B_1B_3B_5$. Кроме того, высота B_iC_i треугольника $B_{i-1}B_iB_{i+1}$ равна 2.

Каждый самопересекающийся четырёхугольник $B_iC_iB_{i+1}C_{i+1}$ распадается на два равных треугольника и поэтому вносит одинаковый вклад в периметры треугольников $B_0B_2B_4$ и $B_1B_3B_5$, а также в их площади. Значит, у треугольников $B_0B_2B_4$ и $B_1B_3B_5$ равны как периметры, так и площади, откуда получаем $R_0 - 1 = R_1 - 1$, то есть $R_0 = R_1$, что и требовалось.

Замечание. Исходные треугольники не обязательно равны между собой, а вписанные в них окружности не обязательно совпадают, см. рисунок справа.

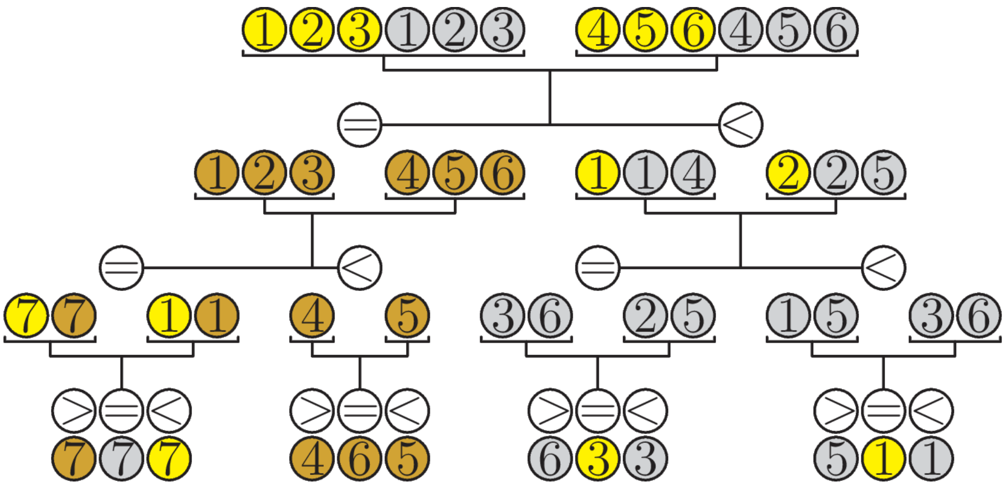


6. [10] Для турнира изготовили 7 золотых, 7 серебряных и 7 бронзовых медалей. Все медали из одного металла должны весить одинаково, а из разных должны иметь различные массы. Но одна из всех медалей оказалась нестандартной – имела неправильную массу. При этом нестандартная золотая медаль может весить только меньше стандартной золотой, бронзовая – только больше стандартной бронзовой, а серебряная может отличаться по весу от стандартной серебряной в любую сторону. Можно ли за три взвешивания на чашечных весах без гирь найти нестандартную медаль?

Александр Грибалко

Ответ: можно.

Решение 1. Взвешивания приведены на схеме (золотые монеты – жёлтые, серебряные – серые, бронзовые – коричневые). Случаи, когда левая чаша перевешивает, разбираются аналогично.



Решение 2. Первым взвешиванием сравним З, З, С, С, Б, Б, Б и З, З, С, С, Б, Б, Б.

1) Одна из чаш перевесила. Тогда под подозрением 2 золотые и 2 серебряные медали с лёгкой чаши, а также 3 бронзовые и 2 серебряные медали с тяжёлой: З, З, Сл, Сл, Б, Б, Б, Ст, Ст.

Вторым взвешиванием сравним З, Ст, Б и З, Ст, Б.

В случае неравенства под подозрением монета З с лёгкой чаши, а также монеты Ст и Б с тяжёлой. Тогда на первую чашу кладём эти З и Б, а на другую – настоящие золотую и бронзовую монеты: если первая чаша легче, то нестандартная З, если тяжелее – то Б, иначе – Ст.

В случае равновесия под подозрением оставшиеся Сл, Сл и Б. Третьим взвешиванием сравниваем две Сл (при неравенстве нестандартна та, что легче, при равенстве – оставшаяся Б).

2) Весы в равновесии. Тогда под подозрением оставшиеся медали: З, З, З, Б, С, С, С.

Возьмём по стандартной медали каждого вида (Зс, Сс, Бс) и сравним З, Зс, С, Бс и З, З, Сс, Б.

Если первая чаша легче, то под подозрением З и С с этой чаши и Б с другой. Этот случай разобран выше.

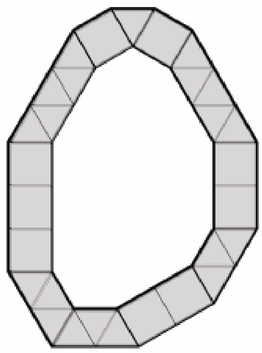
Если вторая чаша легче, то под подозрением две золотые медали с этой чаши и серебряная с другой. Третьим взвешиванием сравним эти две золотые.

Если же чаши в равновесии, то под подозрением оставшиеся две серебряные медали; сравним одну из них со стандартной.

7. [12] На плоскости нарисован выпуклый многоугольник M, и дано простое число p. Оказалось, что существует ровно p разбиений многоугольника M на равносторонние треугольники со стороной 1 и квадраты со стороной 1. Докажите, что длина одной из сторон многоугольника M равна $p-1$.

Н. Белухов

Решение. Заметим, что угол многоугольника M может быть равен 60°, 90°, 120°, 150°. Значит, каждый внешний угол M не меньше 30°. Поскольку сумма внешних углов многоугольника равна 360°, у M не более 12 углов, причём их может быть 12 только в случае, когда все углы равны по 150°. Если у M меньше 12 сторон, то не все его углы равны 150°. Мысленно вставим несколько сторон нулевой длины: если есть угол 120°, вставим в соответствующую вершину сторону нулевой длины, если есть угол 90° (60°), – две (три) последовательные стороны нулевой длины. В итоге получится 12 сторон, некоторые из которых равны 0. Назовём *характеристикой* многоугольника M набор $(a_1, a_2, \ldots, a_{12})$ длин его сторон, перечисленных в порядке обхода против часовой стрелки от фиксированной вершины. Стороны $a_1, a_3, \ldots, a_{11}$ будем называть *нечётными*, а стороны $a_2, a_4, \ldots, a_{12}$ – *чётными*.

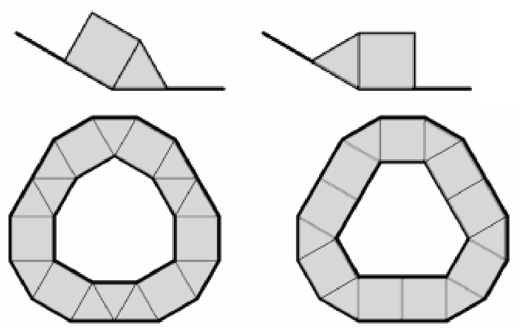


Назовём *каёмкой* разбиения объединение *плашек* (квадратов и равносторонних треугольников), имеющих хотя бы одну общую точку с границей многоугольника M. (см. рис.). Если каемка не совпадает с M, обозначим через M_1 многоугольник, полученный из M отбрасыванием каёмки.

Рассмотрим плашку каёмки, примыкающую к углу, сторона которой лежит на стороне AB многоугольника M. Если это квадрат, то все плашки, примыкающие к AB – тоже квадраты (образующиеся углы в 90° можно замостить только квадратами; рис. слева). Если это треугольник, то все оставшиеся плашки, примыкающие к этой стороне – тоже треугольники (рис. справа). Таким образом, к каждой стороне многоугольника M примыкают либо только квадраты, либо только треугольники.

Отсюда следует, что стороны M_1 будут параллельны соответствующим сторонам M (стороны AB и CD на рисунках). Если у M нет углов по 60° или 90°, то длины сторон M_1 будут либо равны соответствующим длинам сторон M (в случае квадратов), либо на единицу меньше (в случае треугольников). При этом длина стороны M_1 может стать равной 0. Таким образом, M_1 – выпуклый многоугольник, у которого сторон не больше, чем у M. Многоугольник M_1 также имеет характеристику – набор, построенный по тем же правилам так, чтобы нумерации сторон в M и M_1 соответствовали друг другу.

Пусть длины всех сторон M отличны от нуля, то есть все углы M равны 150°. Существует два варианта расположить квадрат и треугольник, примыкающие к углу 150°. При выборе одного из вариантов остальная каёмка восстанавливается однозначно (сначала восстанавливается часть каёмки, примыкающая к сторонам угла, затем разбиения двух соседних углов и т.д.).



Итого получается два варианта каёмки: треугольники расположены вдоль всех нечётных сторон, а квадраты – вдоль всех чётных; или наоборот. В первом варианте характеристикой M_1 будет набор $(a_1 - 1, a_2, a_3 - 1, a_4, \ldots, a_{11} - 1, a_{12})$, во втором – набор $(a_1, a_2 - 1, a_3, a_4 - 1, \ldots, a_{11}, a_{12} - 1)$.

Пусть по крайней мере одна нечётная сторона M равна 0, а все чётные стороны отличны от нуля. Рассмотрим такое i, что $a_i = 0$. Тогда угол при соответствующей вершине в многоугольнике M будет равен 120° (поскольку a_{i-1} и a_{i+1} не равны 0), то есть его единственным образом можно разбить на два треугольника. Далее каёмка восстанавливается однозначно: вдоль всех чётных сторон лежат треугольники, а вдоль всех нечётных сторон ненулевой длины – квадраты. Характеристика M_1 будет равна $(a_1, a_2 - 1, a_3, a_4 - 1, \ldots, a_{11}, a_{12} - 1)$.

Если хоть одна чётная сторона M равна нулю, а все нечётные стороны отличны от нуля, аналогично получим, что характеристика M_1 будет равна $(a_1 - 1, a_2, a_3 - 1, a_4, \ldots, a_{11} - 1, a_{12})$.

Если же по крайней мере одна чётная и одна нечётная сторона M равны нулю, то каёмка тем более восстанавливается однозначно. Поскольку все ненулевые стороны M_1 параллельны соответствующим сторонам M и имеют такую же или меньшую длину, то по крайне мере одна чётная и одна нечётная стороны M_1 равны нулю. Значит, и следующая каёмка восстанавливается (не более чем) однозначно, и так далее.

Обозначим $m = \min\{a_1, a_3, \ldots, a_{11}\}$, $n = \min\{a_2, a_4, \ldots, a_{12}\}$. Одно из чисел m или n отлично от нуля, иначе M можно разбить не более чем одним способом. Выделим у многоугольника M каёмку, уменьшающую либо чётные, либо нечётные стороны M (если одно из чисел m или n равно 0, то каёмку можно выбрать единственным способом). Уберём каёмку, останется многоугольник M_1. Выделим какую-нибудь каёмку многоугольника M_1, уберём её и обозначим оставшийся многоугольник через M_2. Будем продолжать так до тех пор, пока хотя бы одна чётная и хотя бы одна нечётная стороны станут равны нулю. В этот момент характеристика многоугольника будет равна ($a_1 - m$, $a_2 - n$, $a_3 - m$, $a_4 - n$, …, $a_{11} - m$, $a_{12} - n$).

Оставшийся многоугольник M_{m+n} не зависит от того, какие именно каёмки были выбраны на предыдущих шагах, поскольку такая характеристика задаёт не более одного многоугольника. Поэтому M_{m+n} можно разбить на плашки (иначе и M нельзя было разбить), причём единственным образом. Следовательно, количество разбиений M равно количеству способов уменьшить оба числа m и n до 0 (за ход уменьшая одно из чисел на 1), то есть C_{m+n}^{m}.

По условию C_{m+n}^{m} – простое число p. Заметим, что $m + n \geq p$ – иначе C_{m+n}^{m} не делится на p. Также m и n отличны от 0, иначе $C_{m+n}^{m} = 1$. Значит, $C_{m+n}^{m} \geq C_{m+n}^{1} = m + n \geq p$. Равенство достигается только для $\{m, n\} = \{1, p-1\}$. В обоих случаях одно из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ равно $p - 1$.

Более подробное решение можно прочитать в статье «Разбиения многоугольника» в журнале «Квантик», №9 за 2022 год.

10 – 11 классы

1. [5] См. задачу 3 младших классов.

2. В прямоугольной системе координат (с одинаковым масштабом по осям x и y) нарисовали график функции $y = f(x)$. Затем ось ординат и все отметки на оси абсцисс стёрли. Предложите способ, как с помощью карандаша, циркуля и линейки восстановить ось ординат, если

а) [4] $f(x) = 3^x$;

б) [4] $f(x) = \log_a x$, где $a > 1$ – неизвестное число.

Михаил Евдокимов

Решение. **а**) Пусть какая-то прямая, параллельная оси абсцисс, пересекает график $y = 3^x$ в точке A, а B – проекция этой точки на ось абсцисс. Проведём прямую, параллельную оси абсцисс, на расстоянии $3AB$ от неё и найдём точку C её пересечения с графиком и проекцию D этой точки на ось абсцисс. Тогда $BD = 1$. Прямая, параллельная оси абсцисс и находящаяся от неё на расстоянии 1, пересекает график в точке, лежащей на оси ординат.

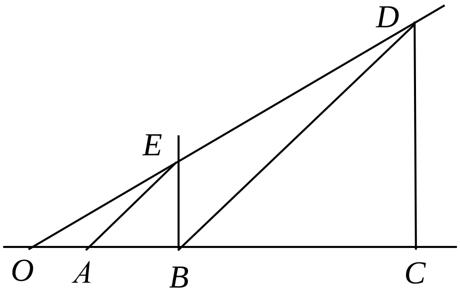
б) Пусть график $y = \log_a x$ пересекает ось абсцисс в точке A. Проведём в верхней полуплоскости прямые l и m, параллельные оси абсцисс, так, чтобы расстояние между l и m равнялось расстоянию от l до оси абсцисс. Пусть $B(x, 0)$ и $C(x^2, 0)$ – проекции на ось абсцисс точек пересечения этих прямых с графиком. Достаточно построить начало координат.

Способ 1. $AB = x - 1$, $BC = x^2 - x$, $BC - AB = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, тогда можно построить отрезок длины $\dfrac{(x-1)(x-1)}{(x-1)^2} = 1$. Отложив его «влево» от точки A, получим начало координат.

Способ 2. Пусть O – начало координат, F и D – точки на графике, находящиеся над B и C соответственно, E – точка пересечения прямых OD и BF. Тогда

$$OE : OD = OB : OC = x : x^2 = 1 : x = OA : OB,$$

т.е. прямые AE и BD параллельны.



Отсюда построение: строим точку E пересечения прямой, проходящей через A параллельно BD, с прямой BF, а далее точку O пересечения прямой ED и оси абсцисс. Ось ординат – вертикаль, проходящая через O.

Замечание. Прямую DC строить не нужно.

3. [8] См. задачу 5 младших классов.

4. [8] По доске $n\times n$ прошла ладья, побывав в каждой клетке один раз, причём каждый её ход был на соседнюю по стороне клетку. Клетки занумерованы целыми числами от 1 до n^2 в порядке прохождения ладьи. Пусть M – наибольшая разность между номерами соседних по стороне клеток. Каково наименьшее возможное значение M?

Борис Френкин

Ответ: $2n - 1$.

Решение. *Пример*. Пусть ладья прошла «змейкой»: сначала по всей нижней горизонтали, потом по следующей (в обратную сторону) и т.д. Наибольшая разность номеров соседних клеток достигается между клетками $2n$ и 1, $3n$ и $n + 1$ и т.д.

Оценка. *Первый способ.* Предположим противное: $M < 2n - 1$. Рассмотрим числа верхней строки. Поскольку разность между любыми соседними числами в этой строке не больше $2n$–2, ладья дошла от меньшего из них к большему, не заходя в нижнюю строку (ведь, чтобы достичь нижней строки, надо сделать минимум $n - 1$ ход, и чтобы вернуться – тоже минимум $n - 1$, плюс ещё хотя бы один ход нужно сделать собственно в нижней строке).

Тогда все числа верхней строки ладья обошла, не заходя в нижнюю строку. Аналогично, все числа нижней строки ладья обошла, не заходя в верхнюю строку. Это значит, что все числа верхней строки больше (или все меньше), чем числа в нижней строке.

Аналогично все числа левого столбца больше (или все меньше) чисел правого столбца.

Не теряя общности, пусть числа левого столбца больше чисел правого, и числа нижней строки больше чисел верхней. Рассмотрим число A в левом верхнем углу и число B в правом нижнем. С одной стороны, $A > B$ (по столбцам), а с другой $A < B$ (по строкам). Противоречие.

Второй способ. Надо доказать, что найдутся соседние клетки, разность номеров которых не меньше $2n - 1$. Пусть доска – это квадрат $ABCD$, этими же буквами обозначим номера соответствующих угловых клеток. Можно считать, что A – наименьший из угловых номеров, а $B < D$. Все клетки при стороне AD разобьются на два непустых множества, в одном номера меньше B, а в другом – больше. Найдётся пара соседних по стороне клеток из разных множеств, пусть их номера $X < Y$. Ладье понадобился хотя бы $n - 1$ ход, чтобы добраться от X до стороны BC, хотя бы один ход вдоль BC и ещё не менее $n - 1$ хода, чтобы дойти до Y. Поэтому $Y - X \geq 2n - 1$.

5. [8] Дан приведённый многочлен степени 2022 с целыми коэффициентами. Какое наибольшее число корней он может иметь на интервале (0, 1)?

Алексей Канель-Белов

Ответ: 2021 корень.

Решение. *Оценка*. Если многочлен имеет 2022 корня, то их произведение – целое число, поэтому хотя бы один корень равен нулю или по модулю не меньше 1.

Пример. Выберем рациональные числа $0 = b_0 < a_1 < b_1 < a_2 < \ldots < a_{2021} < b_{2021} = 1$. Рассмотрим многочлен $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{2021})$; его коэффициенты рациональны, пусть k – произведение их знаменателей. Числа $Q(b_0)$, $Q(b_1)$, ..., $Q(b_{2021})$ знакочередуются, пусть m – минимум их модулей. Выберем натуральное n, которое кратно k и больше $^1/_m$. Приведённый многочлен $P(x) = x^{2022} + nQ(x)$ искомый. Действительно, все его коэффициенты целые; знаки чисел $P(b_i)$ и $Q(b_i)$ совпадают, поэтому $P(x)$ имеет корень на каждом из интервалов (b_i, b_{i+1}) при i от 0 до 2020, то есть 2021 корень на интервале (0, 1).

6. [8] Султан собрал 300 придворных мудрецов и предложил им испытание. Он сообщил им список из 25 цветов и сказал, что на испытании каждому мудрецу наденут на голову колпак одного из этих цветов, причём если для каждого цвета написать количество надетых колпаков этого цвета, все числа будут различны. Каждый мудрец увидит, какой колпак на ком надет, но свой колпак не увидит. Затем одновременно (по сигналу) каждый должен будет назвать предполагаемый цвет своего колпака. Могут ли мудрецы заранее договориться действовать так, чтобы гарантированно хотя бы 150 из них назвали цвет верно?

Александр Грибалко

Ответ: могут.

Решение. Поскольку 300 = 0 + 1 + 2 + ... + 24, один из цветов не использован, другой использован один раз, ..., последний – 24 раза. Занумеруем цвета числами от 0 до 24 и рассмотрим перестановку (c_0, c_1, ..., c_{24}) чисел (0, 1, ..., 24), где c_i – номер цвета, который встречается i раз. Каждый мудрец, на котором надет колпак цвета c_i, знает перестановку с точностью до замены c_i на c_{i-1}, (шапки обоих цветов он видит в количестве $i-1$). Эти две перестановки отличаются чётностью.

Изначально мудрецы делятся на две равные группы: «чётных» и «нечётных». «Чётные» мудрецы называют свой цвет так, чтобы перестановка получилась чётной, а «нечётные» – чтобы она получилась нечётной. В результате ровно половина мудрецов восстановит правильную перестановку, то есть правильно назовёт свой цвет.

7. Звездолёт находится в полупространстве на расстоянии a от его границы. Экипаж знает об этом, но не представляет, в каком направлении двигаться, чтобы достигнуть граничной плоскости. Звездолёт может лететь в пространстве по любой траектории, измеряя длину пройденного пути, и имеет датчик, подающий сигнал, когда граница достигнута. Может ли звездолёт гарантированно достигнуть границы, преодолев путь длиной

а) [6] не более $14a$;

б) [6] не более $13a$?

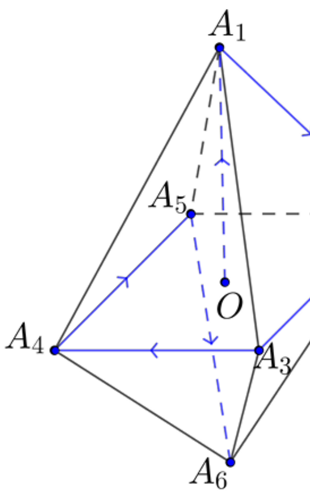
Михаил Евдокимов

Ответ: может.

Решение. **а**) Пусть звездолёт находится в некоторой точке O. Рассмотрим правильный октаэдр $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, описанный возле шара радиуса a с центром в точке O. Объём пирамиды $OA_1A_2A_3$ можно найти двумя способами:

$$V_{OA_1A_2A_3} = \frac{1}{6}(OA_1)^3 = \frac{1}{3}aS_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{3}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}OA_1)^2,$$

откуда $OA = \sqrt{3}a$, а длина ребра октаэдра равна $\sqrt{6}a$.

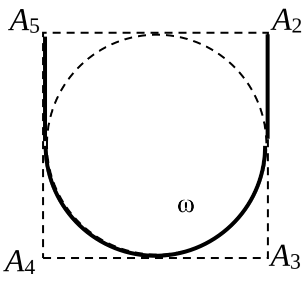


Докажем, что путь $O \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_4 \to A_5 \to A_6$ позволит достигнуть граничной плоскости.

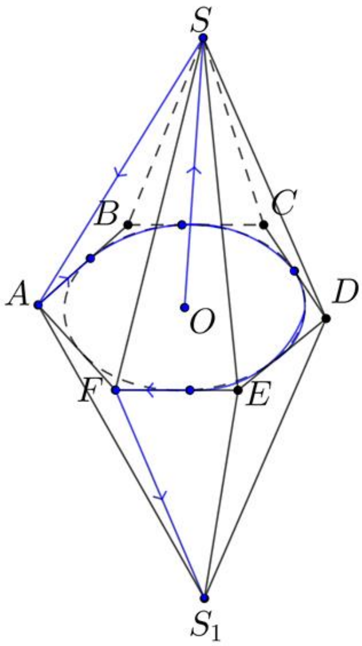
Пусть это не так. Тогда вершины октаэдра, а значит, и сам октаэдр (выпуклая оболочка его вершин), лежат строго внутри полупространства. Тем более там лежит шар радиуса a, вписанный в октаэдр, что противоречит условию.

Длина указанного пути равна $(\sqrt{3}+5\sqrt{6})a < 14a$ (поскольку $30\sqrt{2} < 43$).

б) Заменим участок пути $A_2 \to A_3 \to A_4 \to A_5$ из п. а) на путь, приведённый справа (половина стороны квадрата, полуокружность, половина стороны квадрата). При этом длина пути сократится на $\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{6}a > a$. Выпуклая оболочка точек нового пути всё ещё содержит вписанный в октаэдр шар радиуса a, поскольку этот шар касается образующей конуса с вершиной A_1, основанием которого является вписанная окружность ω квадрата $A_2A_3A_4A_5$.



Замечание. Можно сократить путь примерно до $12{,}75a$, если в плоскости квадрата $A_2A_3A_4A_5$ рассмотреть правильный шестиугольник $ABCDEF$, описанный вокруг окружности ω. Пройдём по отрезку OA_1, затем по прямой до вершины A шестиугольника, по касательной до точки его касания с ω, по дуге окружности ω, по касательной к ω до точки F , наконец по отрезку FA_6. Можно ещё немного сократить путь, если изменить расстояние от точек A_1 и A_6 до плоскости окружности ω и путь в этой плоскости так, чтобы объединение двух соответствующих конусов содержало шар с центром в O радиуса a. Однако улучшение получается незначительным.



Если у кого-нибудь из участников Турнира получится существенно улучшить оценку сверху или получить хорошую оценку снизу, просьба написать автору задачи по адресу mmo2022kosmos@mail.ru

СОРОК ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 3 апреля 2022 г.

1. Многочлен третьей степени имеет три различных корня строго между 0 и 1. Учитель сообщил ученикам два из этих корней. Ещё он сообщил все четыре коэффициента многочлена, но не указал, в каком порядке эти коэффициенты идут. Обязательно ли можно восстановить третий корень?

Б. Френкин

2. Назовём расположенный в пространстве треугольник ABC *удобным*, если для любой точки P вне его плоскости из отрезков PA, PB и PC можно сложить треугольник. Какие углы может иметь удобный треугольник?

Д. Бродский

3. Дан клетчатый квадрат $n \times n$, где $n > 1$. *Кроссвордом* будем называть любое непустое множество его клеток, а *словом* — любую горизонтальную и любую вертикальную полоску (клетчатый прямоугольник шириной в одну клетку), целиком состоящую из клеток кроссворда и не содержащуюся ни в какой большей полоске из клеток кроссворда (ни горизонтальной, ни вертикальной). Пусть x — количество слов в кроссворде, y — наименьшее количество слов, которыми можно покрыть кроссворд. Найдите максимум отношения x/y при данном n.

Б. Френкин

4. На доске написана функция $\sin x + \cos x$. Разрешается написать на доске производную любой написанной ранее функции, а также сумму и произведение любых двух написанных ранее функций, так можно делать много раз. В какой-то момент на доске оказалась функция, равная для всех действительных x некоторой константе c. Чему может равняться c?

М. Евдокимов

5. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Выберем произвольную окружность ω, касающуюся описанной окружности треугольника ABC внутренним образом в точке B и не пересекающую прямую AC. Отметим на ω точки P и Q так, чтобы прямые AP и CQ касались ω, а отрезки AP и CQ пересекались внутри треугольника ABC. Докажите, что все полученные таким образом прямые PQ проходят через одну фиксированную точку, не зависящую от выбора окружности ω.

А. Марданов

6. На доске написана буква А. Разрешается в любом порядке и количестве: а) приписывать А слева; б) приписывать Б справа; в) одновременно приписывать Б слева и А справа. Например, БААБ так получить можно (А $\to$ БАА $\to$ $\to$ БААБ), а АББА — нельзя. Докажите, что при любом натуральном n половину слов длины n получить можно, а другую половину — нельзя.

Фольклор, предложил А. Шень

СОРОК ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 3 апреля 2022 г.

Предварительные решения задач.

У-1. *Многочлен третьей степени имеет три различных корня строго между 0 и 1. Учитель сообщил ученикам два из этих корней. Ещё он сообщил все четыре коэффициента многочлена, но не указал, в каком порядке эти коэффициенты идут. Обязательно ли можно восстановить третий корень?* *(Б. Френкин)*

Ответ: да, можно.

Решение. Пусть a, b, c, d — коэффициенты многочлена от старшего к младшему, α, β — известные корни, γ — неизвестный корень. Прежде всего заметим, что так как все корни между 0 и 1, то в силу теоремы Виета коэффициент d — наименьший из коэффициентов по абсолютной величине.

Первый способ (А.Тертерян). Рассмотрим всевозможные расстановки коэффициентов a, b, c, положим свободный член равным d и проверим, будут ли α и β корнями получившихся многочленов. При правильной расстановке ответ утвердительный. Предположим, что подойдёт и другая расстановка. Вычтем полученный многочлен из правильного и обозначим их разность $P(x)$. Её свободный член равен 0, поэтому $P(0) = 0$. Сумма коэффициентов также равна 0, поэтому $P(1) = 0$. Кроме того, $P(\alpha) = P(\beta) = 0$. Таким образом, многочлен степени не выше 3 имеет 4 различных корня. Противоречие.

Второй способ (Б.Френкин). Поскольку все корни многочлена положительны, знаки коэффициентов чередуются. Поэтому, зная d, определяем b. Если найти a, то определяется и c. Заметим, что $a\gamma = \frac{-d}{\alpha\beta}$. Поскольку $b = -a(\alpha + \beta + \gamma)$, можно найти $a(\alpha + \beta)$. Так как α и β известны, отсюда определяется a.

У-2. *Назовём расположенный в пространстве треугольник ABC* удобным*, если для любой точки P вне его плоскости из отрезков PA, PB и PC можно сложить треугольник. Какие углы может иметь удобный треугольник?* *(Д. Бродский)*

Ответ: все углы должны быть по $60°$.

Решение. Докажем сначала, что неравносторонний треугольник под условие подходить не может. Предположим противное, пусть такой треугольник ABC есть и в нём $AB \neq AC$, причём длины этих сторон различаются хотя бы на d. Рассмотрим точку P, расположенную на перпендикуляре к плоскости ABC, проходящем через точку A, на расстоянии ε от A. Тогда $PB = \sqrt{AB^2 + \varepsilon^2}$, $PC = \sqrt{AC^2 + \varepsilon^2}$. Можно выбрать P настолько близко к вершине A, уменьшая ε, чтобы PB и PC отличались соответственно от AB и AC меньше, чем на $d/3$, и чтобы ε было меньше $d/3$. Тогда стороны PB и PC будут различаться более чем на $d/3$, а длина стороны PA меньше $d/3$ — противоречие с неравенством треугольника.

Покажем теперь, что равносторонний треугольник удобен.

Первый способ. Пусть $AB = BC = CA$. Отметим на лучах PA, PB, PC точки A_1, B_1, C_1 так, чтобы выполнялись равенства:

$$AB \cdot PA_1 = PB \cdot PC,$$

$$BC \cdot PB_1 = PC \cdot PA,$$

$$CA \cdot PC_1 = PB \cdot PA.$$

Theугольники APB и B_1PA_1 подобны по углу и отношению двух сторон, откуда $A_1B_1 = \frac{AB \cdot PA_1}{PB} = PC$. Аналогично вычисляем длины остальных сторон. Получаем, что треугольник $A_1B_1C_1$ — искомый.

Второй способ. Опустим из точки P перпендикуляр PQ на плоскость треугольника ABC. Достаточно доказать, что отрезки QA, QB, QC (возможно, вырожденные) удовлетворяют нестрогим неравенствам треугольника. В самом деле, пусть $QA = a$, $QB = b$, $QC = c$ и пусть $PQ = x > 0$. Докажем, например, что из неравенства $a + b \geqslant c$ следует неравенство $PA + PB > PC$. Первое неравенство равносильно такому: $a^2 + b^2 + 2ab \geqslant c^2$. Возведя второе неравенство $\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + x^2} > \sqrt{c^2 + x^2}$ в квадрат, получаем эквивалентное неравенство $a^2 + b^2 + 2x^2 + 2\sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)} > c^2 + x^2$, которое выполнено, так как $2x^2 > x^2$ и $2\sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)} > 2ab$ при $x > 0$.

Осталось доказать, что для любой точки Q в плоскости равностороннего треугольника ABC отрезки (возможно, вырожденные) QA, QB, QC удовлетворяют нестрогим неравенствам треугольника. Рассмотрим поворот на 60° вокруг A, переводящий вторую вершину треугольника в третью, скажем, B в C. Пусть R — образ точки Q при этом повороте. Тогда треугольник AQR равносторонний, откуда $RQ = QA$. Кроме того, $QB = RC$. Тогда треугольник QRC (возможно, вырожденный), имеет стороны RQ, RC и QC, равные соответственно QA, QB и QC, откуда следует требуемое.

У-3. *Дан клетчатый квадрат $n \times n$, где $n > 1$.* Кроссвордом *будем называть любое непустое множество его клеток, а* словом *— любую горизонтальную и любую вертикальную полоску (клетчатый прямоугольник шириной в одну клетку), целиком состоящую из клеток кроссворда и не содержащуюся ни в какой большей полоске из клеток кроссворда (ни горизонтальной, ни вертикальной). Пусть x — количество слов в кроссворде, y — наименьшее количество слов, которыми можно покрыть кроссворд. Найдите максимум отношения x/y при данном n.*

(Б. Френкин)

Ответ: $1 + n/2$.

Решение. *Пример.* Для прямоугольника $n \times 2$ получаем $x = n + 2$, $y = 2$.

Оценка. Первый способ. Пусть в кроссворде z клеток. Выберем некоторое его покрытие наименьшим количеством слов. Слова из этого покрытия назовём *правильными*, а остальные *неправильными*.

Каждая клетка содержится не более чем в одном горизонтальном и одном вертикальном слове. Хотя бы одно из этих слов правильное, так как правильные слова покрывают весь кроссворд. Значит, каждая клетка принадлежит не более чем одному неправильному слову. Поэтому сумма количеств клеток в неправильных словах не больше z.

Если клетка является словом, то к ней не примыкает другая клетка кроссворда ни по горизонтали, ни по вертикали. Следовательно, клетка входит в любое покрытие кроссворда словами и, значит, является правильным словом. Поэтому все неправильные слова содержат не меньше чем по две клетки и количество неправильных слов не больше $z/2$.

Так как правильные слова покрывают весь кроссворд, сумма количеств клеток в них не меньше z. Каждое слово содержит не больше n клеток, поэтому количество правильных слов не меньше z/n. Отсюда $x/y \le 1 + \frac{z}{2}/\frac{z}{n} = 1 + n/2$, что и требовалось.

Оценка. Второй способ. Заметим, что если есть слова длины 1, то они обязательно входят в любое покрытие кроссворда. Значит, их можно выкинуть, от этого отношение x/y не уменьшится, поскольку $x \ge y$. Поэтому далее считаем, что все слова имеют длину не меньше 2. Построим двудольный граф, в котором вершины первой доли — это все слова кроссворда, а вершины второй доли — все занятые клетки (ребро соединяет две вершины, если слово содержит клетку). Рассмотрим те из вершин первой доли, которые насыщают всю вторую долю, пусть сумма их степеней равна d. При этом $d \le ny$, поскольку степень каждой из этих вершин не больше n. Так как степень каждой из остальных вершин первой доли не меньше 2, то общее число рёбер в графе не меньше $d + 2(x - y)$. Во второй доле не более d вершин, при этом степень каждой из них не больше 2, значит, число рёбер в графе не превосходит $2d$. Приходим к неравенству $d + 2(x - y) \le 2d$, откуда $2(x - y) \le d \le ny$, и получаем оценку.

У-4. *На доске написана функция $\sin x + \cos x$. Разрешается написать на доске производную любой написанной ранее функции, а также сумму и произведение любых двух написанных ранее функций, так можно делать много раз. В какой-то момент на доске оказалась функция, равная для всех действительных x некоторой константе c. Чему может равняться c?* *(М. Евдокимов)*

Ответ: любому чётному числу.

Решение. Любая функция, полученная описанным способом, — многочлен от $\sin\ x$ и $\cos\ x$ с целыми коэффициентами. Доказательство индукцией по числу шагов: исходная функция имеет такой вид; производная многочлена с целыми коэффициентами — многочлен с целыми коэффициентами; аналогичное верно для суммы и произведения. При $x = 0$ синус и косинус принимают целые значения, поэтому значение многочлена от них с целыми коэффициентами — целое, то есть c целое.

Положим $f(x) = \sin x + \cos x$. Запишем на доску $f'(x) = \cos x - \sin x$, $f''(x) = -\sin x - \cos x$, $f'''(x) = -\cos x + \sin x$. Тогда $f^2(x) + f'^2(x) = (\sin x + \cos x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 \equiv 2$. Аналогично $f(x)f''(x) + f'(x)f'''(x) \equiv -2$. Суммируя такие функции, получаем все чётные константы.

Покажем, что нечётную константу получить нельзя. Заметим, что

$$\sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Поэтому все функции, которые можно получить, — это многочлены от $\sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$ и $\sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})$ с целыми коэффициентами и нулевым свободным членом. При $x = \frac{\pi}{4}$ остаются лишь члены с косинусом (равным 1). Коэффициенты при чётных степенях косинуса чётны, а при нечётных либо иррациональны, либо равны нулю. Целочисленное значение получится, если сумма коэффициентов при нечётных степенях равна 0, но тогда значение чётно, что и требовалось доказать.

У-5. *Дан неравнобедренный треугольник ABC. Выберем произвольную окружность ω, касающуюся описанной окружности треугольника ABC внутренним образом в точке B и не пересекающую прямую AC. Отметим на ω точки P и Q так, чтобы прямые AP и CQ касались ω, а отрезки AP и CQ пересекались внутри треугольника ABC. Докажите, что все полученные таким образом прямые PQ проходят через одну фиксированную точку, не зависящую от выбора окружности ω.* *(А. Марданов)*

Пусть R — точка пересечения касательных AP и CQ. Докажем, что все прямые PQ проходят через точку D — основание внешней биссектрисы угла B треугольника ABC (точка D существует, так как треугольник неравнобедренный). По теореме, обратной к теореме Менелая, для треугольника ARC, достаточно проверить, что $\frac{AP}{PR} \cdot \frac{RQ}{QC} \cdot \frac{CD}{DA} = 1$. Поскольку RQ и PR равны как касательные, достаточно проверить равенство $\frac{AP}{QC} = \frac{AD}{DC}$. Но $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$ по свойству внешней биссектрисы, так что проверяем равенство $\frac{AP}{QC} = \frac{AB}{BC}$.

Пусть AB и BC пересекают окружность ω в точках X и Y соответственно. Запишем степени точек A и C относительно окружности ω: $AX \cdot AB = AP^2$, $CY \cdot CB = CQ^2$, поэтому осталось проверить равенство $AX/AB = CY/CB$. Это равенство следует из того, что ω касается описанной окружности треугольника ABC в точке B.

У-6. *На доске написана буква А. Разрешается в любом порядке и количестве: а) приписывать А слева; б) приписывать Б справа; в) одновременно приписывать Б слева и А справа. Например, БААБ так получить можно (А → БАА → БААБ), а АББА — нельзя. Докажите, что при любом натуральном n половину слов длины n получить можно, а другую половину — нельзя.*

(Предложил А. Шень)

Решение 1. Назовем слова, которые можно получить, достижимыми. Всего существует 2^n различных слов длины n, поэтому достаточно доказать, что количество достижимых слов длины n равно 2^{n-1}. Докажем это утверждение по индукции.

База индукции. Для $n = 1$ и $n = 2$ это легко проверяется: А → АА, А → АБ.

Шаг индукции. Пусть для всех длин, не превосходящих n, утверждение верно. Посмотрим, как можно получить слово длины $n + 1$:

1) из слова длины n, применив операцию а): W → AW;

2) из слова длины n, применив операцию б): W → WБ;

3) из слова длины $n - 1$, применив операцию в): W → БWA.

Слов 1-го и 2-го типа по 2^{n-1}, а слов 3-го типа — 2^{n-2}. При этом слова 3-го типа не могут совпадать со словами 1-го и 2-го типа. А вот множества слов 1-го и 2-го типа пересекаются. Их общие слова имеют вид АwБ. Докажем, что слова w (которые находятся между буквами А и Б) — это все достижимые слова длины $n-1$. Понятно, что если w — достижимое слово, то за две операции из него можно получить АwБ. С другой стороны, если слово wБ достижимое, то посмотрим, как оно было получено. Если проделать все те же операции, но пропустить приписывание последней буквы Б, то будет получено слово w, значит, оно достижимое.

Таким образом, общих слов 1-го и 2-го типа столько же, сколько достижимых слов длины $n-1$, то есть 2^{n-2}. Следовательно, количество слов длины $n+1$ равно $2^{n-1}+2^{n-1}-2^{n-2}+2^{n-2}=2^n$, что и требовалось доказать.

Решение 2. Назовём все слова, которые можно получить из А указанными операциями, допустимыми. Докажем сначала следующий критерий того, что слово допустимо. Надо подсчитать общее число букв А в слове, пусть это k, и посмотреть, какая буква стоит в слове на k-м месте слева: если там А, то слово допустимо, а если Б — нет (если $k=0$, то слово тоже недопустимо).

Ясно, что все допустимые слова удовлетворяют критерию: изначально он выполнен (одна буква А на первом месте), а далее при каждом приписывании сохраняется (нетрудно проверить).

Обратно, пусть слово удовлетворяет критерию. Удаляя слева буквы А по одной, мы, очевидно, сохраняем критерий, то же верно при удалении справа букв Б по одной. Дойдя так слева до буквы Б, а справа — до А, можем удалить эту пару, сохраняя критерий. Такими операциями можно прийти к одной букве, и это обязательно А, так как для неё критерий должен выполняться.

Решим теперь задачу. Будем считать, что n хотя бы 2 (для $n=1$ задача очевидна). Общее число допустимых слов можно подсчитать так: допустимые с одной А, с двумя А, …, с n буквами А.

Рассмотрим допустимые слова с k буквами А, где $0<k<n$. Чтобы их подсчитать, надо зафиксировать на k-м месте букву А и расставить на оставшихся местах $n-k$ букв Б, остальное заполнить буквами А.

Но ровно столько же будет недопустимых слов с $n-k$ буквами А, у которых на $(n-k)$-м месте стоит буква Б: комбинаторно их количество вычисляется аналогично.

Суммируя по k от 1 до $n-1$ и добавляя допустимое слово А…А и недопустимое слово Б…Б, получаем все допустимые и все недопустимые слова, причём их количества равны.

Решение 3. Для каждого слова, для каждой его буквы подсчитаем разность количества букв Б слева и букв А справа. Легко видеть, что при переходе от буквы к соседней справа эта величина увеличивается на 1, если эти две буквы одинаковые, увеличивается на 2 при переходе от Б к А, не изменяется при переходе от А к Б. Буквы, для которых эта величина равна 0, назовём *центральными*; понятно, что в любом слове их не более двух, при этом слова длины n бывают четырёх типов:

(1) в которых есть центральная А и нет центральной Б;

(2) в которых есть центральная Б и нет центральной А;

(3) в которых есть две центральные буквы, и тогда это рядом стоящие АБ;

(4) в которых нет центральных букв, тогда в слове есть рядом стоящие БА такие, что для Б наша величина равна -1.

Поставим слову типа 3 в соответствие слово, получающееся транспозицией его центральных букв, получится слово типа 4. Нетрудно видеть, что это взаимно однозначное соответствие (обратное отображение — смена БА на АБ, где у Б величина равна -1).

Рассмотрим слово типа 1, пойдём влево от центральной буквы А, пока не встретим букву Б (или не дойдём до конца слова), выделим все пройденные буквы А (включая центральную), заменим все выделенные буквы А на буквы Б, получится слово типа 2 (центральной Б будет полученная из левой выделенной А), которое назовём соответственным исходному, это соответствие тоже взаимно однозначное (обратное отображение строится аналогично).

Таким образом, слов длины n, в которых есть центральная А (слова типа 1 и типа 3), столько же, сколько слов, в которых центральной А нет (слова типа 2 и типа 4). Остаётся показать, что получить можно в точности слова, в которых есть центральная А.

При применении любой операции из условия, для любой уже написанной буквы рассмотренная величина не меняется, поэтому во всех словах, которые можно получить из А, есть центральная буква А. Обратно, индукцией по длине слова легко получить, что если в нём есть центральная буква А, то его можно получить (если слово заканчивается на Б, то эту Б можно выкинуть и применить предположение индукции, иначе, если слово начинается на А — выкинем левую А, а иначе можно выкинуть вместе левую Б и правую А).